XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, sendo *a*, *b* e *c* inteiros. Sabe-se que $f(1) = f(-1) = 0$.

As retas tangentes ao gráfico de *f* nos pontos $A = (-1; 0)$ e $B = (1; 0)$ cortam-se em *C*. Calcule a área do triângulo *ABC*, sabendo-se que tal área é inteira.

PROBLEMA 2

Calcule a integral: $\int_0^{\pi/4}\ln(1+tgx)dx$

PROBLEMA 3

Determine o maior valor possível para o volume de um tetraedro inscrito no elipsóide de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$.

PROBLEMA 4

Sejam *A* e *B* matrizes reais quadradas de mesma dimensão tais que, para todo inteiro positivo *k*, $(A+B)^k=A^k+B^k$. Prove que se *A* é invertível então *B* é a matriz nula.

PROBLEMA 5

Determine todos os valores reais de α para os quais a matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ definida por $a_{ij}=\cos((i-1)\cdot j\alpha),$ para $1\le i, j\le n,$ tem determinante nulo.

PROBLEMA 6

Prove que existem pelo menos 2005 potências 27-ésimas distintas (isto é, números da forma n^{27}, com *n* inteiro positivo), todas com exatamente 2005 algarismos, tais que qualquer uma pode ser obtida de qualquer outra a partir de uma permutação de seus algarismos.