XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Primeira Fase

Soluções Nível Universitário

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Seja p_n a probabilidade pedida. Claramente $p_0 = 1,\ p_1 = \frac{1}{2}$.

A probabilidade de que ele *nunca* tenha *n* pontos é $1 - p_n$. Por outro lado, a única forma de nunca ter *n* pontos é completar *n* – 1 pontos e depois tirar coroa. Assim:

$$1 - p_n = \frac{p_{n-1}}{2}$$

[5 pontos por chegar aqui]

donde $\frac{2}{3} - p_n = \frac{p_{n-1}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$ e portanto $p_n - \frac{2}{3} = \left(p_0 - \frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\boxed{p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Seja $m = mdc\left\{k \,\middle|\, a_k \neq 0\right\}$.

Claramente $\frac{2\pi}{m}$ é um período de *f*: afirmamos que este é o *menor* período. **[5 pontos por chegar aqui]**

Escreva $f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}z^k + \frac{a_k}{2}z^{-k}\right), z = e^{ix}$

$$f(x+p) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k w^k}{2}z^k + \frac{a_k w^{-k}}{2}z^{-k}\right), w = e^{ip}$$

Duas funções racionais só são iguais (ou iguais para números complexos de módulo 1) se seus coeficientes forem iguais. Assim, se *p* é um período, temos $a_k w^k = a_k$ para $k = 1, \ldots, n.$ Em outras palavras ou $a_k = 0$ ou $\frac{k_p}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$. Equivalentemente, *p* deve ser um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{m}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Seja $A(a)$ a área da elipse $3x^2 + 2y^2 \leq a.$

Os semieixos da elipse são $\sqrt{\frac{a}{2}}$ e $\sqrt{\frac{a}{3}}$ donde $A(a) = \frac{\pi a}{\sqrt{6}}$.

O sólido do problema pode ser descrito como a união disjunta de

$$3x^2+2y^2\le z, 0\le z<b, b=\frac{\sqrt{21}-1}{10}$$

$$3z^2+2y^2\le 1-5z^2, b\le z\le \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donde

$$v=\int_0^b A(z)dz+\int_b^{\frac{1}{\sqrt{5}}} A(1-5z^2)dz = \int_0^b \frac{\pi z}{\sqrt{6}}dz+\int_b^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(1-5z^2\right)dz$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}-b-\frac{1}{3\sqrt{5}}+\frac{5}{3}b^3\right)=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\frac{31}{300}+\frac{2\sqrt{5}}{15}-\frac{7\sqrt{21}}{100}\right)$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Suponha a uma n-ésima potência mod $4a^2$

Escreva $|a|=2^{e_2}\cdot 3^{e_3}\ldots\cdot p^{e_p}\cdot\ldots$

Vamos provar que o expoente e_p é múltiplo de *n*.

Segue da hipótese que $a=b\cdot p^{e_p}$ é n-ésima potência módulo p^{2e_p} onde mdc(*b*, *p*) = 1.
Assim existem *c*, *d* com mdc(*c*, *p*) = 1,

$c^n p^{nd}\equiv b\cdot p^{e_p} \pmod{p^{2e_p}}$ donde $nd=e_p$. Assim $|a|$ é uma n-ésima potência.

[6 pontos por chegar até aqui]

Falta provar que se *n* é par então $a>0$.
Suponha por absurdo o contrário: *n* par, $a<0$.

Escreva $a=-2^{nd}\tilde{b}$, $\tilde{b}$ ímpar, $\tilde{b}>0$.

Assim *a* e $-a$ são ambos n-ésimas potências módulo 2^{nd+2}:

$$\begin{matrix} c^n\cdot 2^{nd}\equiv -\tilde{b}\cdot 2^{nd} \pmod{2^{2nd+2}} \\ \tilde{c}^n\cdot 2^{nd}\equiv \tilde{b}\cdot 2^{nd} \pmod{2^{2nd+2}}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c^n\equiv -\tilde{b} \pmod{2^{nd+2}} \\ \tilde{c}^n\equiv \tilde{b}\pmod{2^{nd+2}}\end{matrix} \Rightarrow \tilde{b} \text{ e } -\tilde{b} \text{ são quadrados módulo 4}$$

$\Rightarrow -1$ é quadrado módulo 4 $\Rightarrow$ Absurdo!

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Os autovalores são $n, n-2, n-4, \ldots, -n+2, -n,$ ou seja, $2k-n$ para $k=0,1,\ldots,n.$ **[2 pontos pela resposta]**

Vamos exibir os autovetores de M^t.

Interprete o vetor $\left(a_0,a_1,\ldots,a_n\right)\in\mathbb{R}^{n+1}$ como o polinômio $P=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n$.

O polinômio correspondente a $M^t(a_0,\ldots,a_n)$ é $y\frac{\partial p}{\partial x}+x\frac{\partial p}{\partial y}\cdot$ Se expandirmos os polinômios em $u=x+y$ e $v=x-y$ este operador passa a ser $u\frac{\partial p}{\partial u}-v\frac{\partial p}{\partial v}$.

Mas $\left(u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(u^kv^{n-k}\right)=\left(2k-n\right)u^kv^{n-k}$.

Assim este é o autovetor associado ao autovalor $(2k-n)$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Expanda as funções y, e^{t^2} e $2sen(t)+tg(t)$ em series de potências:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

$$e^{t^2} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$$

$$2sent + tgt = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$$

Temos $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{ty'}{y-1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a_1 t + 2a_2 t^2 + \ldots + na_n t^n + \ldots}{a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots}$

donde este limite é igual a N se $a_N \neq 0$ e $a_m = 0$ para $0 < m < N$. **[2 pontos por observar isto]**

Substituindo as séries de potências na EDO:

$$2a_2 + 6a_3 t + \ldots + (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \ldots$$

$$+b_0 a_1 + (b_1 a_1 + 2b_0 a_2)t + \ldots + (b_n a_1 + 2b_{n-1}a_2 + \ldots + kb_{0+1-k}a_k + \ldots + (n+1)b_0 a_{n+1})t^n + 3a_0 t + 3a_1 t^2 + \ldots +$$

$$+3a_{n-1}t^n + \ldots = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots \text{ donde}$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(c_n - b_n a_1 - 2b_{n-1}a_2 - \ldots - (n+1)b_0 a_{n+1} - 3a_{n-1}\right)$$

Segue facilmente que $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

Se $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 0$ e $c_n = 0$ temos $a_{n+2} = 0$ e se $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 0$ e $c_n \neq 0$ temos $a_{n+2} \neq 0$. Devemos portanto procurar $\widetilde{N}$ tal que $c_{\widetilde{N}} \neq 0$ e $c_m = 0$ para $1 < m < \widetilde{N}$.

Temos $sent = t - \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^5}{120} + \ldots$

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \ldots$$

$2sent + \tan t = 3t + \dfrac{3t^5}{20} + \ldots$ **[2 pontos por expansão em série]**

Assim $\widetilde{N} = 5$ donde $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{ty'}{y-1} = 7$.