XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Primeira Fase - Nível Universitário

PROBLEMA 1

Há muito tempo, em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, vértices de um cubo de aresta igual a um ano-luz tendo os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ como faces e tendo os segmentos AE, BF, CG e DH como arestas. Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de B para C. Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de A para G. Sabendo que a primeira atinge o ponto C no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto G, determine a menor distância entre as naves durante esse deslocamento.

PROBLEMA 2

Quantos são os pares ordenados (x, y), com $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 142\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143?

PROBLEMA 3

Dados dois polinômios com coeficientes complexos em uma variável $f(x)$ e $h(x)$, prove que existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) = g(h(x))$ se, e somente se, existe um polinômio com coeficientes complexos em duas variáveis $q(x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro positivo.

Seja A_n o subconjunto do plano definido por $1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \ln(x)$. Seja B_n o polígono convexo de vértices $(1, 0) = (1, \ln(1)), (2, \ln(2)), (3, \ln(3)), ..., (n, \ln(n)), (n, 0)$. Seja $C_n = A_n - B_n$, o complemento de B_n em relação a A_n.

(a) Calcule as áreas de A_n, B_n e C_n. Simplifique sua resposta.

(b) Mostre que a área de C_n é menor que 1, para qualquer inteiro positivo n.

Obs: ln representa o logaritmo na base e.

PROBLEMA 5

Suponha que temos um grafo com $n+1 \geq 4$ vértices e queremos pintar suas arestas com duas cores de forma que não haja duas arestas disjuntas da mesma cor. Mostre que há no máximo 2^n tais colorações.

Observações: Um grafo é formado por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, cada aresta unindo dois vértices distintos e cada par de vértices sendo unido por no máximo uma aresta. Arestas disjuntas são arestas que não têm vértices em comum.

PROBLEMA 6

Cada um dos itens a seguir apresenta um valor diferente para a matriz B. Para cada um desses valores, determine quantas matrizes reais A existem tais que $A^3 - 3A = B$.

(a)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$