XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 1 (6º. e 7º. anos)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 1

1) A	6) A	11) D	16) E
2) B	7) E	12) D	17) C
3) E	8) C	13) D	18) D
4) B	9) E	14) A	19) B
5) B	10) D	15) A	20) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 1 = 20 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (A) Ela gastou com chamadas R\$119,76 – R\$29,90 – R\$15,50 = R\$74,36.

2. (B) Para decidir qual das opções é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM, vamos calcular o valor gasto em cada opção. Temos:
Na opção A), 6 latas de 200g, o valor da compra é 6 × R\$3,00 = R\$18,00.
Na B), 1 lata de 400g e 1 lata de 800g , o valor da compra é 1 × R\$5,00 + 1 × R\$9,00 = R\$14,00.
Na C), 4 latas de 200g e 1 lata de 400g, o valor é 4 × R\$3,00 + 1 × R\$5,00 = R\$17,00.
Na D), 2 latas de 200g e 1 lata de 800g, o valor é 2 × R\$3,00 + 1 × R\$9,00 = R\$15,00.
E na E), 2 latas de 200g e 2 latas de 400g, o valor é 2 × R\$3,00 + 2 × R\$5,00 = R\$16,00.
Ou seja, a opção B) é a mais econômica das opções apresentadas.

3. (E) A alternativa A) é falsa pois o milho foi mais caro que o arroz e o feijão no começo de janeiro.
A alternativa B) é falsa pois feijão teve menor variação de preço entre os itens analisados.
A alternativa C) é falsa pois o feijão foi mais barato que o milho no começo de janeiro e também em abril e meados de maio.
A alternativa D) é falsa pois os preços são iguais todas vez que os gráficos se cruzam, há se contar 7 vezes.
Logo a alternativa E), o produto com menor variação de preços foi o feijão, é a verdadeira.

4. (B) Vamos quebrar o período em duas partes. Temos:
De 10/10/10 até 09/10/11, há 365 dias.
De 10/10/11 até 11/11/11 há 22 dias mais 11 dias, ou seja, 33 dias.
Logo, de 10/10/10 até 11/11/11, incluindo o dia 10 e o dia 11, há 365 + 33 = 398 dias.

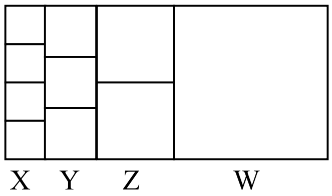
5. (B) O polígono obtido por Luana tem 12 lados. Se ela trocar 2 triângulos por 2 quadrados, ela troca duas pontas com 2 lados cada por duas pontas com 3 lados cada, ou seja, ela fica com um polígono de 12 – 4 + 6 = 14 lados.
E se ela trocar agora 1 triângulo por 1 pentágono, ela troca uma ponta com 2 lados por uma ponta com 4 lados, ou seja, ela fica, ao final, com um polígono de 14 – 2 + 4 = 16 lados.

6. (A) Seja N o número de voos.
Se 10% dos voos foram cancelados, restaram 90% de N. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva, ou seja, 20% de 90% de N = 0,20 × 0,90 × N = 0,18 × N = 18% de N.

Dessa forma, a porcentagem do total de voos que foram cancelados é 28%.

7. (E) A maior soma possível de três números naturais para obter o produto é 105 é usando 105, 1 e 1, ou seja, 105 + 1 + 1 = 107.

8. (C) Cada quadrado da coluna X tem lado de medida igual a 1/4 da medida do quadrado da coluna W, cada quadrado da coluna Y tem lado igual a 1/3 do lado do quadrado da coluna W e cada quadrado da coluna Z tem lada igual a 1/2 do lado do quadrado da coluna W.



Assim, o menor valor para o lado do quadrado W é o mmc(2, 3, 4) = 12 e os lados dos quadrados das colunas X, Y e Z são, respectivamente, 3, 4 e 6.
Portanto as dimensões do retângulo são 3 + 4 + 6 + 12 = 25 e 12, cuja área é 25 × 12 = 300.

9. (E) A proporção apresentada nos permite construir o seguinte padrão:

Meninos	Meninas	Total
1	5	6
2	6	8
3	7	10
4	8	12
5	9	14
...	...	...
15	19	34
16	20	36

Nela vemos que há 20 meninas nessa classe.

10. (D) Sejam A, B, C e D os quatro números. Queremos a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início, $\frac{A+B+C+D}{4}$. Ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, ela obteve:

$A+\frac{B+C+D}{3}=60 \Leftrightarrow 3A+B+C+D=180$,

$B+\frac{A+C+D}{3}=64 \Leftrightarrow 3B+A+C+D=192$,

$C+\frac{A+B+D}{3}=68 \Leftrightarrow 3C+A+B+D=204$ e

$D+\frac{A+B+C}{3}=72 \Leftrightarrow 3D+A+B+C=216$.

Temos então:

$$(3A+B+C+D)+(A+3B+C+D)+(A+B+3C+D)+(A+B+C+4D)=180+192+204+216 \Leftrightarrow$$
$$6A+6B+6C+6D=792$$

Sendo assim:

$$6A+6B+6C+6D=792 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\cdot\left(6A+6B+6C+6D\right)=\frac{1}{6}\cdot 792 \Leftrightarrow$$

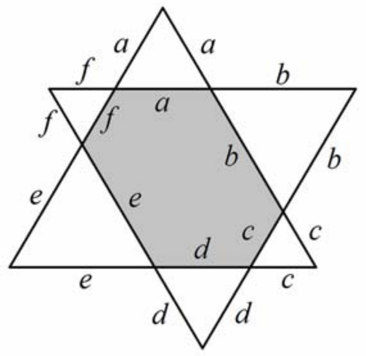
$$A+B+C+D=132 \Leftrightarrow \frac{A+B+C+D}{4}=\frac{132}{4}=33$$

11. (D) Podemos contar todas as maneiras de receber o troco de 37 centavos fazendo uma listagem de todos os recebimentos possíveis, ordenando as moedas em ordem decrescente: ou seja, dado que $37 = 25x + 10y + 5z + 1w$, basta contar quantas soluções inteiras não-negativas essa equação possui. Note que *x* representa o número de moedas de 25 centavos, *y* o número de moedas de 0 centavos, *z* o de 5 centavos e *w* o de 1 centavo. As soluções são:

$$(1,1,0,2);(1,0,2,2);(1,0,1,7);(1,0,0,12);(0,3,1,2);(0,3,0,7);(0,2,3,2);(0,2,2,7);$$
$$(0,2,1,12);(0,2,0,17);(0,1,5,2);(0,1,4,7);(0,1,3,12);(0,1,2,17);(0,1,1,22);(0,1,0,27)$$
$$(0,0,7,2);(0,0,6,7);(0,0,5,12);(0,0,4,17);(0,0,3,22);(0,0,2,27);(0,0,1,32);(0,0,0,37)$$

Logo, há um total de 24 maneiras.

12. (D) Primeiro, observe que, como o hexágono tem lados opostos paralelos, os seis triângulos menores da figura do problema também são equiláteros, devido ao paralelismo, que mantém os ângulos entre retas iguais a 60° (já que, inicialmente, as retas formavam ângulos de 60°, devido aos dois triângulos equiláteros). Logo, podemos escrever as medidas dos lados como na figura:



A soma dos perímetros dos dois triângulos equiláteros é igual a $3(a+b+c+d+e+f)$, e como cada triângulo equilátero tem perímetro $72cm$, temos $3(a+b+c+d+e+f)=72$, isto é, $a+b+c+d+e+f=24$. Como esse também é o perímetro do hexágono, temos que o perímetro procurado é 24*cm.*

13. (D) Se *x* é o número de pessoas que ficaram na frente de Dido, então *4x* é o número de pessoas que ficaram atrás de Dido. Daí, contando o número de participantes da corrida (inclusive Dido), temos a equação $x+4x+1=2011$, isto é, $x=402$. Por fim, se 402 pessoas estavam na frente de Dido, ele obteve o 403° lugar.

14. (A) Note que, para um número ter exatamente 4 divisores positivos, sua fatoração em primos deve ser da forma pq ou p^3, onde p e q são primos distintos (veja por que na observação abaixo). Daí, os números de 1 a 30 que possuem exatamente 4 divisores são os seguintes:
6 = 2.3, 10 = 2.5, 14 = 2.7, 22 = 2.11, 26 = 2.13, 15 = 3.5, 21 = 3.7, $8=2^3$, $27=3^3$.
Portanto, temos 9 números.

Observação: Dado um número em sua fatoração em primos $n = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} ... p_k^{\theta_k}$, o número de divisores positivos de n é igual a $(1+\theta_1)(1+\theta_2)...(1+\theta_k)$. Para ver po rque, observe que todo divisor de n é da forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$, com $1 \le \beta_i \le \theta_i$, para todo i de 1 até k. Com isso, temos $(1+\theta_1)$ escolhas para β_1, $(1+\theta_2)$ escolhas para β_2, ..., $(1+\theta_k)$ escolhas para β_k. Logo, temos ao todo $(1+\theta_1)(1+\theta_2)...(1+\theta_k)$ escolhas para os $\beta' s$, e como cada escolha define um divisor, a demonstração está completa.

15. (A) Note inicialmente que pintamos 9.6 = 54 quadradinhos de vermelho. Quando serramos o cubo, temos 27 cubinhos e como cada cubinho tem 6 faces quadradas, o total de faces quadradas é igual a 6.27 = 162 quadradinhos. Destes, 54 são vermelhos e os 162 – 54 = 108 restantes são brancos. Logo, a razão entre a superfície pintada de vermelho e a superfície pintada de branco é igual a 54/108 = 1/2.

16. (E) Vamos contar o número de pedaços e folhas: temos (n – 1) pedaços que foram rasgados só uma vez, (n – 1) pedaços que foram rasgados duas vezes e n pedaços que foram rasgados três vezes. Logo, o total de pedaços é igual a 3n – 2. Como 28 = 3.10 – 2 (aqui atribuímos n = 10), 28 pode ser o total de pedaços obtidos por Esmeralda. Pode-se notar ainda que não podemos ter 3n – 2 = 15 ou 18 ou 24 ou 26.

17. (C) Observando as multiplicações:

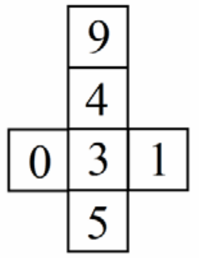
$$9.9 = 81$$
$$99.99 = 9801$$
$$999.999 = 998001$$
$$9999.9999 = 99980001$$
$$...$$

Percebemos que, quando elevamos $\underbrace{99...9}_{a}$ ao quadrado, obtemos $\underbrace{99...9}_{a-1}8\underbrace{00...0}_{a-1}1$ (podemos até provar isso matematicamente!

$\left(\underbrace{99...9}_{a}\right)^2 = (10^a - 1)^2 = 10^{2a} - 2.10^a + 1 = 1\underbrace{00...0}_{2a} - 2\underbrace{00..0}_{a} + 1 = \underbrace{99...9}_{a-1}8\underbrace{00...00}_{a} +$
$1 = \underbrace{99...9}_{a-1}8\underbrace{00...0}_{a-1}1$

). Logo, o número ao quadrado vai possuir a – 1 noves. Logo, n^2 vai ter 2011 – 1 = 2010 noves.

18. (D)



Se observarmos as três figuras, podemos montar o dado a partir do recorte da figura ao lado (Perceba que não consideramos as rotações dos números na figura ao lado). Com isso, é fácil observar que, na primeira figura o número 5 está tocando a mesa; na segunda figura, o número 1 está tocando a mesa; na terceira figura, o número 4 está tocando a mesa. Logo, a soma dos números de todas as faces em contato com a mesa é igual a 5 + 1 + 4 = 10.

19. (B) Observe que 5!, 6!, 7!, 8!, ... terminam em 0, já que todos eles possuem 2 e 5 dentro da multiplicação, ou seja, são múltiplos de 2.5 = 10 e, por isso mesmo, terminam em 0. Assim, o algarismo das unidades de 5! + 6! +...+ 2010! + 2011! é igual a 0, e como 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33, que termina em 3, temos finalmente que 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! +...+ 2010! + 2011! termina em 3 + 0 = 3.

20. (C) Inicialmente, o dinheiro total que as moças têm é igual a 11.2 + 7.5 + 3.10 = 87, e com isso, temos que cada uma das moças deve possuir 87/3 = 29 reais. Além disso, note que Esmeralda possui 22 reais, Rose tem 35 reais e Nelly tem 30 reais. Como Rosa e Nelly possuem mais do que 29 reais, elas devem dar algumas notas a alguém – Rosa deve dar pelo menos 2 notas de 5 (se ela desse só uma nota, ela teria 30 reais, mais do que 29), e Nelly deve dar pelo menos uma nota de 10. Daí, para Rosa conseguir 29 reais ela precisa receber pelo menos 2 notas de 2 reais, e para Nelly conseguir 29 reais, ela deve receber uma nota de 5 e duas de 2 reais. Portanto, Esmeralda entrega no mínimo 4 notas de 2 reais, Rosa entrega no mínimo 2 notas de 25 reais e Nelly entrega pelo menos uma nota de 10 reais. Com isso, o número de notas que trocaram de mãos é pelo menos 7. De fato, com 7 trocas é possível que as três moças possuam 29 reais:

- Nelly entrega uma nota de 10 reais a Esmeralda;
- Rosa entrega uma nota de 5 reais a Esmeralda e outra para Nelly;
- Esmeralda entrega duas notas de 2 reais a Rosa e 2 notas de 2 reais para Nelly;