XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. ou 9º. anos)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) B	6) B	11) D	16) A	21) E
2) D	7) C	12) E	17) D	22) C
3) E	8) C	13) B	18) D	23) E
4) E	9) D	14) C	19) E	24) Anulada
5) C	10) D	15) A	20) B	25) D

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**
- **Na questão ANULADA todos os alunos devem receber 1 ponto.**

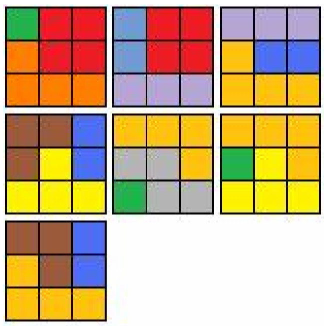
1. Resposta:
Qualquer divisor positivo de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ deve ter a forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, com a, b e c inteiros, $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$ e $0 \le c \le 3$. Apenas $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ é dessa forma. Cada um dos outros números possui um fator primo diferente de 2, 3 e 5.

2. Resposta:
Se 2% de um número é igual a 1, então esse número é 50. Seu sucessor é 51, portanto a soma de ambos é 101.

3. Resposta:

$$\frac{4^{\left(4^2\right)}}{4^4} = \frac{4^{16}}{4^4} = 4^{16-4} = 4^{12}.$$

4. Resposta:
As únicas configurações possíveis são:



5. Resposta:

Temos $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \Leftrightarrow x-y=\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \Leftrightarrow x-y=\frac{y-x}{xy}$, mas podemos cancelar a diferença, que é diferente de zero, então $1=\frac{-1}{xy} \Leftrightarrow xy=-1$.

6. Resposta:

Como a média dos números é 98 eles são $98-x$ e $98+x$, x inteiro positivo. Como os números têm dois dígitos, $98+x<100 \Leftrightarrow x<2$. Assim, $x=2$ e a diferença entre os números é (98 + 1) – (98 – 1) = 2.

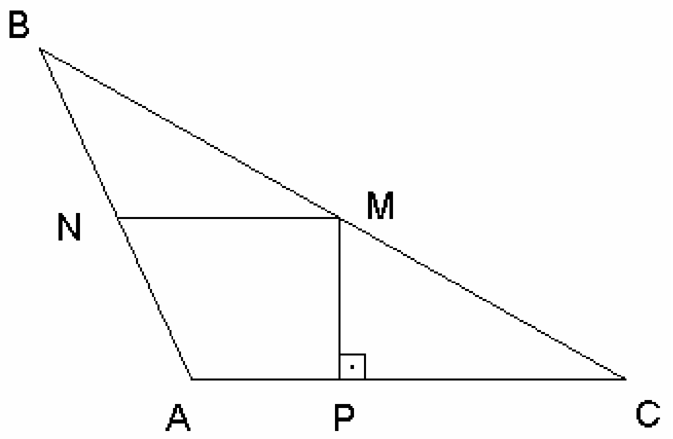
7. Resposta:

Do desenho dado, cada lado do tabuleiro mede pelo menos 3 e, sendo o quadradinho do canto preto, a quantidade de quadradinhos pretos é igual a 17, se a área do tabuleiro é par, e 18, se a área é ímpar. No primeiro caso, a área é $17+17=34=2\cdot 17$, o que não é possível; no segundo caso, a área é $17+18=35=5\cdot 7$, e o tabuleiro tem dimensões 5 e 7.

8. Resposta:

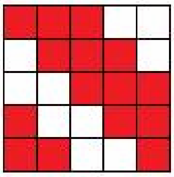
Podemos utilizar apenas os 6 dígitos 0,1,3,4,6,9. Para o dígito das centenas temos 5 possibilidades, não podemos utilizar o dígito 0, para escolhermos os demais dígitos temos 6 possibilidades. Assim pelo princípio multiplicativo, temos 5 × 6 × 6 = 180 números.

9. Resposta:



Os triângulos BNM e BAC são semelhantes pelo caso LAL, então os segmentos AC e NM são paralelos. Assim, os ângulos NMP e MPC devem ser iguais, e como MPC é igual a 90°, temos que NMP também é igual a 90°.

10. Resposta:
Cada linha ou coluna pode conter no máximo 3 fichas, então o máximo de fichas possíveis é 15. O exemplo a seguir mostra que esse máximo é atingido.



11. Resposta:
Como $\frac{100}{100-n}-\frac{n}{100-n}=1$, segue que se $\frac{n}{100-n}$ é inteiro então $\frac{100}{100-n}$ também é inteiro. Assim basta procurarmos pelos divisores inteiros de 100 pois para cada divisor d, teremos n =100 – d como solução. O número 100 possui 18 divisores inteiros.

12. Resposta:
Quando Ana andar 3/4 da escada, Beatriz terá andado 1/4 da mesma. Isso significa que Ana é três vezes mais rápida para descer do que Beatriz para subir. Quando Ana andar mais 1/4 da escada e terminar, Beatriz terá andado mais um terço disso, que é 1/12. Assim, Beatriz andou 4/12 da escada, então ainda terá que subir 8/12 = 2/3 dela, ou seja, 2/3 · 24 = 16 degraus.

13. Resposta:
Se a afirmação falsa fosse de Cernaldo ou de Dernaldo, significaria que Arnaldo e Bernaldo fizeram afirmações verdadeiras. Mas se Bernaldo tivesse todas as cartas vermelhas, só haveria 3 números disponíveis para Arnaldo pegar. Então, a afirmação falsa só pode ser de Arnaldo ou de Bernaldo.
Se a afirmação falsa foi de Arnaldo, Bernaldo deve ter as 5 cartas vermelhas, então sobram as 5 cartas verdes para Cernaldo. Mas assim não há como Dernaldo possuir 3 cartas de um mesmo número. A afirmação falsa não pode ser de Arnaldo.
Se a afirmação falsa foi de Bernaldo, então podemos montar a seguinte tabela de cartas e assinalar a inicial de quem possui cada uma:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Azul	A	B	B	D	D
Amarelo	A	B	B	D	D
Verde	A	C	C	B	D
Vermelho	A	C	C	C	A

Assim, só Bernaldo pode ter feito a afirmação falsa.

14. Resposta:

O triângulo superior ao retângulo é um triângulo equilátero de lado $\frac{l}{4}$. Assim sua altura vale $\frac{h}{4}$ onde h é a altura do triângulo equilátero de lado l e consequentemente o maior lado do retângulo mede $h-\frac{h}{4}=\frac{3h}{4}$. Logo a área do retângulo é

$$\frac{l}{4}\cdot\frac{3h}{4}=\frac{3}{8}\left(\frac{hl}{2}\right)=\frac{3}{8}\cdot 40=15.$$

15. Resposta:

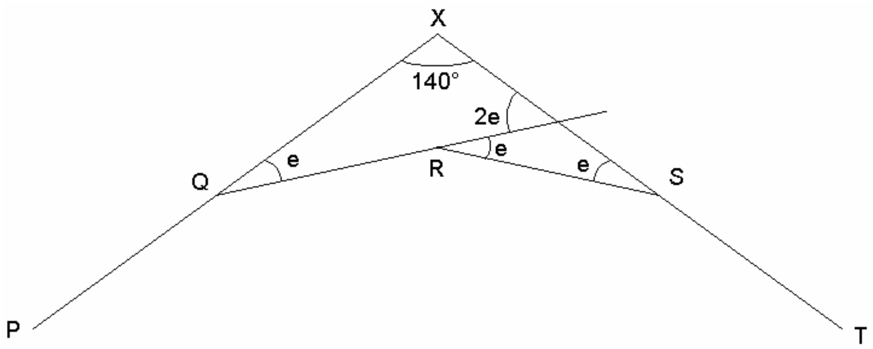
Como a soma dos números é 83, que é ímpar, um deles é ímpar. Sendo a única potência de 2 ímpar igual a 1, o menor número é 1.

16. Resposta:

Iremos representar os três triângulos com as letras da bússola: *O*, *N*, *L*. Para desenhar qualquer lado de um triângulo, somos obrigados a desenhar todos os outros lados. A princípio devemos escolher uma ordem para desenhar os triângulos. Podemos fazer isso de 6 maneiras que correspondem as permutações possíveis das letras *O*, *N* e *L*. Podemos desenhar cada triângulo de duas maneiras a partir do ponto central, logo o total de maneiras de desenharmos a figura é $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

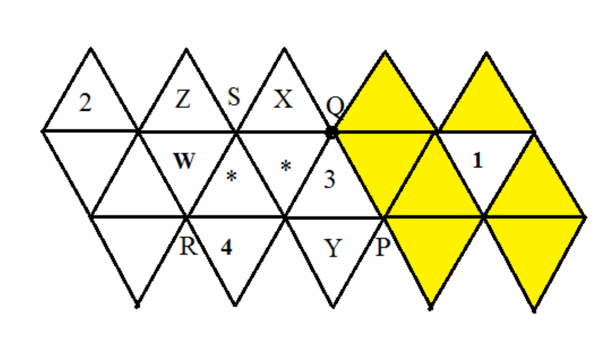
17. Resposta:

Prolongue QR até encontrar o segmento XS. Através da figura, podemos encontrar o valor do ângulo externo do polígono, que deve ser 360° dividido pelo número de lados n.



$$3e+140°=180° \Leftrightarrow 3e=40° \Leftrightarrow \frac{360°}{n}=\frac{40°}{3} \Leftrightarrow n=27$$

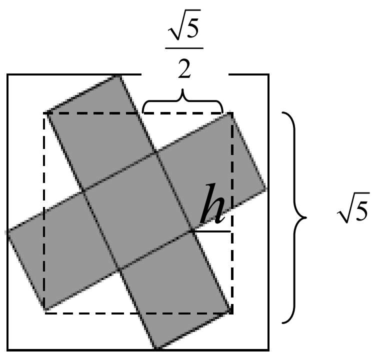
18. Resposta:



As faces destacadas, partilham um vértice com a face marcada com 1, portanto não podem ser iguais a 1. Assim, observando o vértice P, $Y = 1$. Logo as casas marcadas com * são 2 e 5, em alguma ordem, e, observando o vértice Q, $X = 1$.
Por fim, no vértice R, $W \neq 4$, de modo que $Z = 4$.

19. Resposta:
Seja x o tempo que o segundo relógio voltou no tempo. Então queremos resolver a congruência $2x \equiv -x \pmod{24} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{8}$. O menor inteiro positivo que satisfaz essa congruência é 8. Quando o segundo relógio tiver voltado 8 horas no tempo (e portanto estará marcando 05:00), a hora certa será 13:00 + 8:00 = 21:00.

20. Resposta:



Com respeito ao quadrado pontilhado, cada triângulo destacado exterior a esse quadrado corresponde a um triângulo branco no interior do mesmo. Concluímos assim que sua área vale 5. Seja h a distância do vértice direito do quadrado central ao lado direito do quadrado pontilhado. Por semelhança temos:

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Como a distância do quadrado pontilhado ao quadrado maior é h, segue que o lado do quadrado maior vale $\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$ e consequentemente sua área vale $\frac{49}{5}$.

21. Resposta:

Temos $x^2-y^2=2^{2010} \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=2^{2010}$. Cada fator é inteiro e deve ser uma potência de 2: $x-y=2^a$ e $x+y=2^b$ com $a+b=2010$ Resolvendo o sistema, $x=2^{b-1}-2^{a-1}$ e $y=2^{b-1}+2^{a-1}$, assim precisamos ter $1\le a<b$ para que as soluções sejam inteiras positivas. Os possíveis pares (*a*, *b*) são (1, 2009), (2, 2008), (3, 2007), ..., (1003, 1007) e (1004, 1006), e como cada par (*a*, *b*) leva a um par (*x*, *y*) de forma única, temos no total 1004 soluções.

22. Resposta:

Nenhum dos inteiros em questão é uma potência de um primo *p* pois caso contrário todos os outros inteiros teriam o fator *p* em comum e isso não é permitido. Logo *d* possui pelo menos dois fatores primos distintos. Além disso, um dos números *a*, *b*, *c*, *d* é ímpar; caso contrário mdc (*a*, *b*, *c*, *d*) = 2. Assim, como o menor número ímpar com dois fatores primos distintos é 15, $d\ge 15$. Para *d* = 15, temos como exemplo *a* = 6, *b* = 10, *c* = 12 e *d* = 15.

23. Resposta:

Somar os números de todas as faces visíveis é o mesmo que somar todos os números dos dois dados exceto os dois que estão em faces coladas, então a soma será $2(1+2+3+4)-a-b$, onde *a* e *b* são os números nas faces coladas. Essa soma é igual a $20-a-b$, que pode assumir qualquer valor entre 12 (*a* = *b* = 4) e 18 (*a* = *b* = 1), portanto nunca será 19.

24. Resposta:

ANULADA

25. Resposta:

Como $a\ge 0$ e $b\ge 0$, então $0\le a^3+a<b-b^3 \Rightarrow b^3<b \Leftrightarrow b^2<1 \Leftrightarrow b<1$. Também temos $a<a^3+a<b-b^3<b \Rightarrow a<b$ e assim $a<b<1$.