XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º. anos)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) A	6) D	11) E	16) D	21) D
2) B	7) C	12) C	17) C	22) C
3) D	8) D	13) B	18) B	23) B
4) B	9) D	14) C	19) D	24) A
5) B	10) A	15) E	20) B	25) B

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

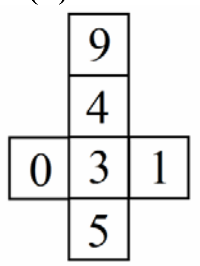
1. (A) Existem 6 caminhos entre A e B com os seguintes custos de pedágio:

$7 + 6 = 13$
$4 + 1 + 6 = 11$
$4 + 3 + 5 = 12$
$9 + 5 = 14$
$8 + 1 + 5 = 14$
$8 + 4 = 12$

O valor mínimo é 11.

2. (B) O valor da área plantada com árvores é $\frac{20}{100}\times 120\times 80 = 120\times 16$ dividindo esse valor por 120 obtemos o dobro da largura procurada e portanto a resposta correta é 8m.

3. (D)



Se observarmos as três figuras, podemos montar o dado a partir do recorte da figura ao lado (Perceba que não consideramos as rotações dos números na figura ao lado). Com isso, é fácil observar que, na primeira figura o número 5 está tocando a mesa; na segunda figura, o número 1 está tocando a mesa; na terceira figura, o número 4 está tocando a mesa. Logo, a soma dos números de todas as faces em contato com a mesa é igual a 5 + 1 + 4 = 10.

4. (B) Seja $x = 20112007$. A expressão do problema é equivalente à:

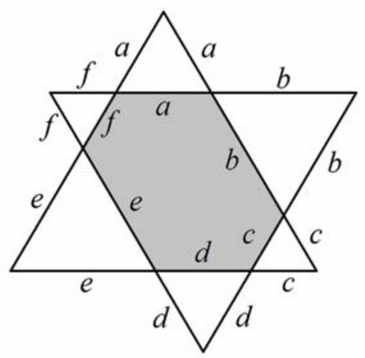
$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (x-4)^2 - 16x &= 2x^2 - 16x + 32 \\ &= 2\left(x^2 - 8x + 16\right) \\ &= 2(x-4)^2\end{aligned}$$

Ou seja, 2×20112003^2.

5. (B) Sejam $A \le B \le C$ os lados do triângulo. Como $A + B + C = 7$, temos $A \le 2.$ Além disso, $A > C - B$. Caso $A = 1$, temos $1 > C - B,\ 6 = C + B.$ Então $C = B = 3$
Caso $A = 2,$ temos $2 \ge C - B,\ 5 = C + B.$ Então $C = 3$ e $B = 2.$

Daí, as triplas de inteiros que são os lados desses triângulos são
$(A,B,C) = (1,3,3)$ e $(2,2,3)$.

6. (D) Primeiro, observe que, como o hexágono tem lados opostos paralelos, os seis triângulos menores da figura do problema também são equiláteros, devido ao paralelismo, que mantém os ângulos entre retas iguais a 60° (já que, inicialmente, as retas formavam ângulos de 60°, devido aos dois triângulos equiláteros). Logo, podemos escrever as medidas dos lados como na figura:



A soma dos perímetros dos dois triângulos equiláteros é igual a $3(a+b+c+d+e+f)$, e como cada triângulo equilátero tem perímetro $72cm$, temos $3(a+b+c+d+e+f) = 72$, isto é, $a+b+c+d+e+f = 24$. Como esse também é o perímetro do hexágono, temos que o perímetro procurado é $24cm$.

7. (C) Inicialmente, para cada opção calculemos o produto das vogais e consoantes de sua frase correspondente.

A) 6 × 6 = 36
B) 5 × 6 = 30
C) 7 × 6 = 42
D) 8 × 5 = 40
E) 7 × 7 = 49

A única opção que corresponde ao número mencionado na opção é a alternativa C.

8. (D) Podemos contar todas as maneiras de receber o troco de 37 centavos fazendo uma listagem de todos os recebimentos possíveis, ordenando as moedas em ordem decrescente: ou seja, dado que $37 = 25x + 10y + 5z + 1w$, basta contar quantas soluções inteiras não-negativas essa equação possui. Note que x representa o número de moedas de 25 centavos, y o número de moedas de 0 centavos, z o de 5 centavos e w o de 1 centavo. As soluções são:

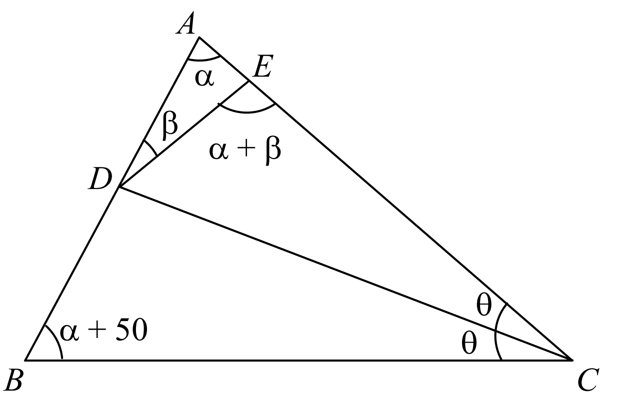
$$(1,1,0,2);(1,0,2,2);(1,0,1,7);(1,0,0,12);(0,3,1,2);(0,3,0,7);(0,2,3,2);(0,2,2,7);$$
$$(0,2,1,12);(0,2,0,17);(0,1,5,2);(0,1,4,7);(0,1,3,12);(0,1,2,17);(0,1,1,22);(0,1,0,27)$$
$$(0,0,7,2);(0,0,6,7);(0,0,5,12);(0,0,4,17);(0,0,3,22);(0,0,2,27);(0,0,1,32);(0,0,0,37)$$

Logo, há um total de 24 maneiras.

9. (D) Note que, para um número ter exatamente 4 divisores positivos, sua fatoração em primos deve ser da forma pq ou p^3, onde p e q são primos distintos (veja porque na observação abaixo). Daí, os números de 1 a 30 que possuem exatamente 4 divisores são os seguintes:
$6 = 2.3$, $10 = 2.5$, $14 = 2.7$, $22 = 2.11$, $26 = 2.13$, $15 = 3.5$, $21 = 3.7$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$.
Portanto, temos 9 números.

Observação: Dado um número em sua fatoração em primos $n = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} ... p_k^{\theta_k}$, o número de divisores positivos de n é igual a $(1+\theta_1)(1+\theta_2)...(1+\theta_k)$. Para ver porque, observe que todo divisor de n é da forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$, com $1 \le \beta_i \le \theta_i$, para todo i de 1 até k. Com isso, temos $(1+\theta_1)$ escolhas para β_1, $(1+\theta_2)$ escolhas para β_2, ..., $(1+\theta_k)$ escolhas para β_k. Logo, temos ao todo $(1+\theta_1)(1+\theta_2)...(1+\theta_k)$ escolhas para os $\beta's$, e como cada escolha define um divisor, a demonstração está completa.

10. (A) Sejam $\alpha = B\widehat{A}C$, $\beta = A\widehat{D}E$ e $2\theta = B\widehat{C}A$. Temos $A\widehat{B}C = 50° + \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo BCD: $\alpha + 50 + \theta = 90° + \beta$ (*)
Além disso, $2\alpha + 2\theta + 50 = 180$ pelo soma dos ângulos internos do $\Delta ABC.$ Substituindo o valor de $\alpha + \theta = \dfrac{180 - 50}{2} = 65$ em (*), temos $\beta = 25.$



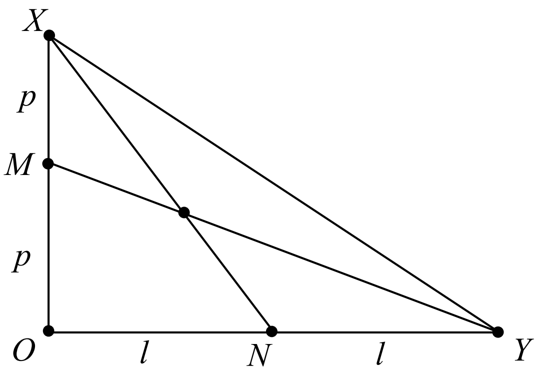
11. (E) Seja x o número que iremos subtrair do numerador e do denominador. Temos: $\dfrac{13 - x}{14 - x} = \dfrac{14}{13} \Rightarrow 169 - 13x - 196 - 14x \Rightarrow x = 27.$

12. (C) Podemos agrupar os números de 4 em 4 cujo produto de seus membros termina em 4:

$$\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{\text{termina em 4}} \cdot \underbrace{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}_{\text{termina em 4}} \cdot \underbrace{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}_{\text{termina em 4}} ...$$

como temos uma quantidade par de grupos, o algarismo das unidades e do produto é 6.

13. (B)



Pelo teorema de Pitágoras nos triângulos ΔXON e ΔMOY temos

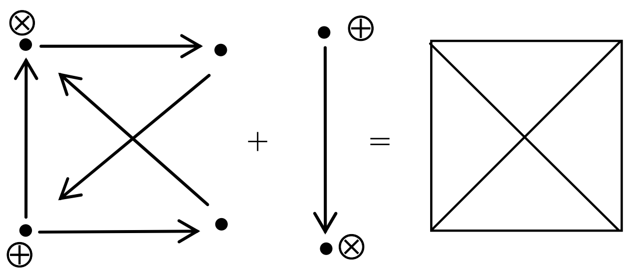
$$\begin{cases} p^2 + 4l^2 = 22^2 \\ l^2 + 4p^2 = 19^2 \end{cases}$$

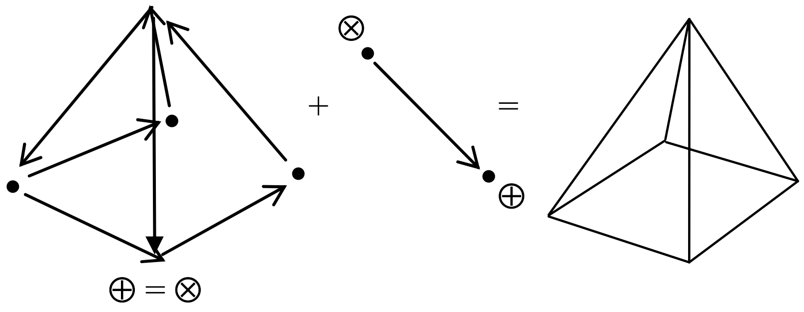
Daí, $\overline{XY}^2 = 4\left(p^2 + l^2\right) = \dfrac{4}{5}\left(22^2 + 19^2\right) = 26^2$

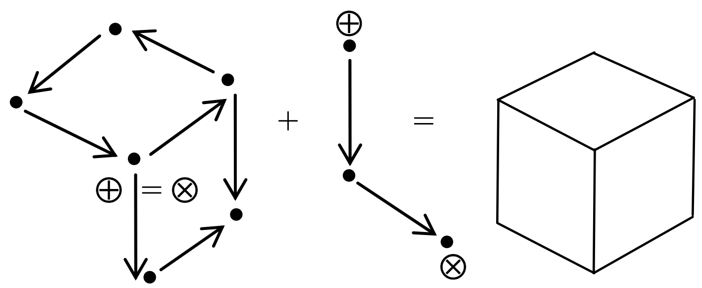
14. (C) Vamos contar o número de pedaços e folhas: temos (n – 1) pedaços que foram rasgados só uma vez, (n – 1) pedaços que foram rasgados duas vezes e n pedaços que foram rasgados três vezes. Logo, o total de pedaços é igual a $3n - 2$. Como $28 = 3.10 - 2$ (aqui atribuímos $n = 10$), 28 pode ser o total de pedaços obtidos por Esmeralda. Pode-se notar ainda que não podemos ter $3n - 2 = 15$ ou 18 ou 24 ou 26.

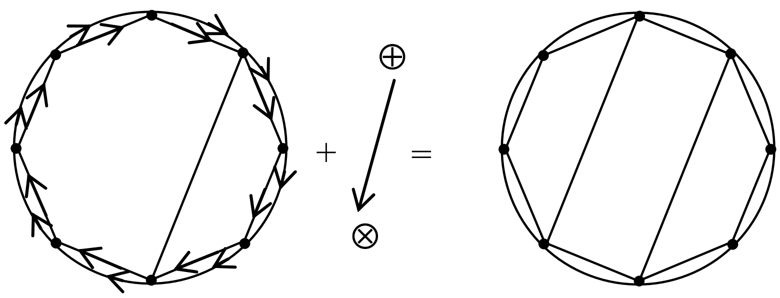
15. (E) No conjunto {5, 10, 20} podemos escolher no máximo dois números. No conjunto {1, 2, 3, 4} podemos escolher no máximo 3 números. Em cada um dos conjuntos {6, 12}, {7, 14}, {8, 16} e {9, 18} podemos escolher no máximo 5 números.
Logo, o total de números que podemos escolher é no máximo 2 + 3 + 4 + 5 = 14.
Um exemplo de tal conjunto é {1, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

16. (D) A figura que Topázio desenhou é a união de duas figuras que podem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel e que se intersectam em no máximo dois vértices. Vamos denotar o início da caminho com o símbolo ⊕ e o seu final com ⊗. As setas indicam a ordem do caminho.



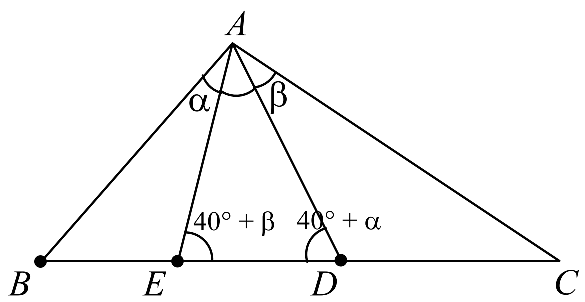






Um desenho que pode ser feito sem tirar o lápis do papel possui no máximo dois vértices de grau ímpar. A união de dois desenhos desse tipo, possui no máximo 4 vértices de grau ímpar. A figura *D* possui 8 vértices de grau ímpar e consequentemente não foi desenhada por Topázio.

17. (C)

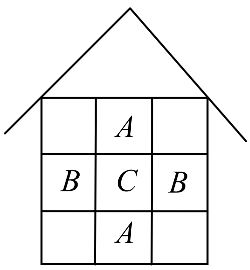


Sejam $\alpha = B\widehat{A}E$ e $\beta = D\widehat{A}C$. Como $\overline{BD} = \overline{AB}$, $B\widehat{D}A = 40° + \alpha$. Analogamente, $A\widehat{E}C = 40° + \beta$. A soma dos ângulos internos do ΔAED produz $120° + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 60°$. Portanto, $B\widehat{A}C = \alpha + \beta + 40° = 100°$.

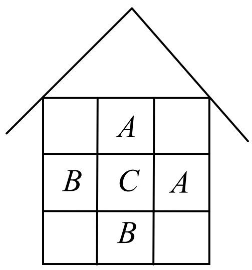
18. (B) Sejam C, E e B os números das respostas corretas, erradas e em branco, respectivamente. Pelo enunciado, $4C - E = 52$ e $C + E + B = 24$
Somando as duas equações obtemos $5C + B = 76$. Daí, $C \le 15$. Para $C = 15$, temos $B = 1$ e $E = 8$.

19. (D) Se $10^k \le N < 10^{k+1}$ então $10^{k/2} \le \sqrt{N} < 10^{\frac{k+1}{2}}$ enquanto que $10^{k-2} \le \dfrac{N}{100} < 10^{k-1}$. Daí, a operação de dividir por 100 reduz mais a quantidade de dígitos do que a operação de extrair a raiz quadrada quando o número possui mais que cinco dígitos. Após as 4 primeiras operações, o número que aparece na tela é no máximo $2011{,}20112011 = x$.
Se nas próximas operações o número não for dividido por 100, precisaremos de no máximo quatro operações para obter um número menor que 2. Se na próxima operação dividirmos por 100, obteremos 20,1120112011 e nesse caso precisaremos de no máximo três operações para obtermos um número menor que 2.

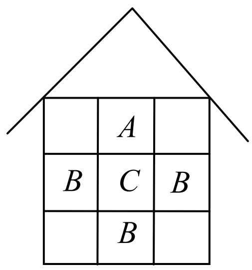
20. (B) Começaremos escolhendo a cor do centro, posteriormente as cores das pontas da cruz central e por último as cores dos quadrados nos cantos. Vamos dividir a coloração da cruz em quatro casos correspondendo as possíveis colorações dos vértices da cruz:



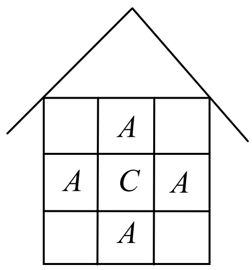
1ª. Aparecem duas cores alternadas no vértice.



2ª. Aparecem duas cores não alternadas e em mesma quantidade.



3ª. Aparecem duas cores em quantidades diferentes.



4ª. Aparece uma única cor.

Uma vez que escolhemos as cores da cruz, termo uma ou duas possibilidades para cada vértice : 1 se os quadrados adjacentes possuem cores diferentes e 2 caso contrário.
Para o centro temos três possibilidades e, para cada escolha, há duas escolhas para A e B. Total de colorações em cada caso:

1º. caso: $3 \times 2 \times 2^0 = 6$
2º. caso: $3 \times 2 \times 2^2 \times 2 = 48$
3º. caso: $3 \times 2 \times 2^2 \times 4 = 96$
4º. caso: $3 \times 2 \times 2^4 = 96$

Total: 246.

21. (D) Se hoje está chovendo, X deve obrigatoriamente ser um OVNI – nerd. Além disso, W não pode ser um ET-nerd, pois caso contrário estaria falando a verdade em um dia de chuva. Temos então a seguinte distribuição:

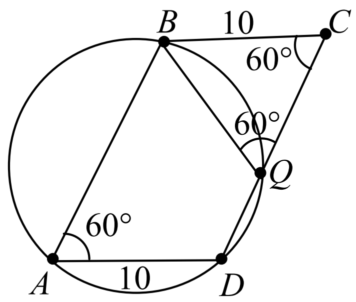
(X, Y, Z, W) = (OVNI, UFO ou ET, UFO ou ET, OVNI ou UFO).
Se hoje não está chovendo, X mentiu e não pode ser um ET-nerd. As próximas três falas são verdadeiras, logo temos a seguinte distribuição.

(X, Y, Z, W) = (UFO, ET ou OVNI, ET ou OVNI, ET ou OVNI).
Portanto, é possível que haja um UFO nerd e três ET-nerds.

22. (C) $\frac{1}{5^{12}} = \frac{4096}{10^{12}}$ concluímos que o primeiro dígito não nulo após a vírgula de $\frac{1}{5^{12}}$ é 4.

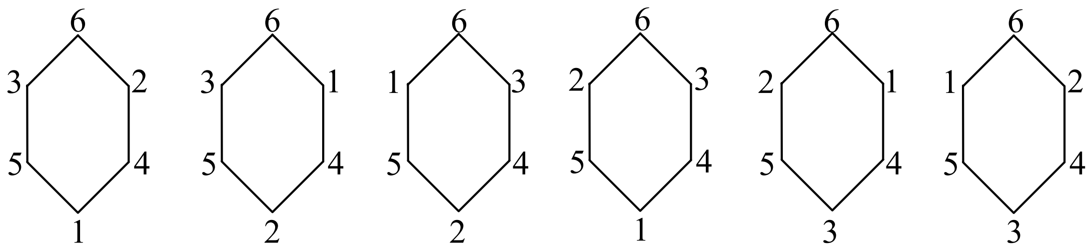
23. (B) Como $2010 = 67 \times 3 \times 5 \times 2$ e qualquer número de conjunto $\{3\times5,\ 3\times2,\ 5\times2,\ 3\times5\times2,\ 3,\ 5,\ 2,\ 1\}$ é menor que 32, concluímos que 2010 não serve para Esmeralda. Contudo, 2009 = 41 × 49 satisfaz as condições impostas por Esmeralda.

24. (A)



Como o quadrilátero $ABQD$ é cíclico, temos que $B\hat{Q}C = B\hat{A}D = 60°$. Além disso, como $ABCD$ é um paralelogramo, temos $B\hat{C}Q = B\hat{A}D = 60°$. Daí, ΔBCQ é equilátero e $\overline{CQ} = \overline{BC} = 10$.

25. (B) Na soma dos números escritos em lados alternados do hexágono, aparecem produtos de números no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Essa soma é mínima se os maiores números são multiplicados pelos menores números. Se os números $\{5, 6, 4\}$ não são adjacentes no hexágono, temos 6 possíveis distribuições.



Dessas configurações, a menor soma é 58. Se pelo menos dois números do conjunto {4, 5, 6} são adjacentes, é fácil ver que a soma é maior que 58.