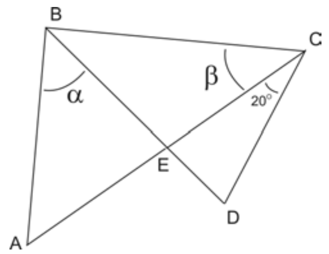
XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – PI – RN – RS – SC

14 de junho de 2008

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

01) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?

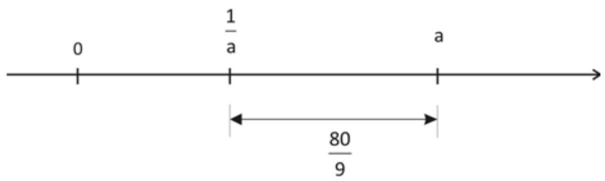


A) $\frac{3}{5}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** 1 **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** $\frac{5}{3}$

02) Sendo $x = 10^{-2008}$, assinale a alternativa que apresenta o maior valor.

A) $\frac{1}{x}$ **B)** $\frac{1}{x(x+1)}$ **C)** $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ **D)** x **E)** $\frac{x}{x+\frac{1}{x}}$

03) O número inteiro positivo a e o número $\frac{1}{a}$ localizam-se na reta da seguinte maneira:



Qual é a soma desses dois números?

A) $\frac{9}{81}$ **B)** $\frac{9}{80}$ **C)** $\frac{81}{9}$ **D)** $\frac{82}{9}$ **E)** 9

04) Uma grande empresa possui 84 funcionários, e sabe-se que cada funcionário fala pelo menos uma das línguas entre Português e Inglês. Além disso, 20% dos que falam Português também falam Inglês e 80% dos que falam Inglês também falam Português. Quantos funcionários falam as duas línguas?
A) 12 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

05) Rafael tem 10 cartões. Cada um tem escrito um dos números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68, e todos os dez números aparecem. Qual o menor número de cartões que Rafael pode escolher de modo que a soma dos números nos cartões escolhidos seja exatamente 100?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5
E) não é possível obter soma 100 com esses cartões.

06) Em uma pista de corrida, cujo formato é de um polígono regular de *n* vértices, numerados de 1 até *n* no sentido anti-horário, existem três pessoas: Nelly, Sônia e Penha, estando inicialmente todas em um mesmo vértice. Em um dado momento elas começam a caminhar pelos lados do polígono. Nelly caminha no sentido anti-horário, enquanto que Sônia e Penha caminham no sentido contrário. Nelly cruza com Sônia pela primeira vez em um vértice e com Penha dois vértices à frente. A velocidade de Nelly é o dobro da velocidade de Sônia e a velocidade de Sônia é o dobro da velocidade de Penha. Quantos vértices tem o polígono?
A) 30 **B)** 60 **C)** 15 **D)** 10 **E)** 6

07) Nove números são escritos em ordem crescente. O número do meio é a média aritmética dos nove números. A média aritmética dos 5 maiores é 68 e a média aritmética dos 5 menores é 44. A soma de todos os números é:
A) 500 **B)** 504 **C)** 112 **D)** 56 **E)** 70

08) A primeira fase da OBM se realiza no dia 14 de junho, um sábado do ano bissexto 2008. Daqui a quantos anos o dia 14 de junho será novamente no sábado?
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

09) De quantas maneiras podemos dividir R$ 10,00 em moedas de 10 centavos e de 25 centavos, se pelo menos uma moeda de cada valor tem que ser usada?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

10) O inteiro n é tal que $n \cdot 2^n$ possui 2008 divisores a mais que n. A soma dos algarismos de n é igual a:
A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 12

11) Quantos dos números 2, 3, 5, 7, 11 são divisores de $371^4 - 41^4$?
A) um **B)** dois **C)** três **D)** quatro **E)** cinco

12) Tenho um cubo de madeira, com três faces vermelhas e três faces azuis, de modo que faces opostas tenham cores diferentes. O cubo é cortado em 3 x 3 x 3 = 27 cubos menores. Quantos destes cubos menores têm, pelo menos, uma face vermelha e outra azul?
A) 6 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 16

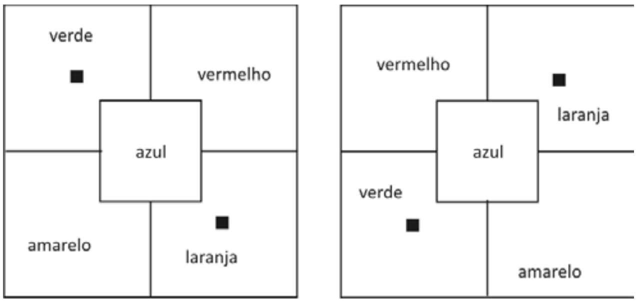
13) O número de soluções reais do sistema

$$\begin{cases} a^2 = b + 2 \\ b^2 = c + 2 \\ c^2 = a + 2 \end{cases}$$

é igual a:
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 8

14) Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: "Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas." Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?
A) $\dfrac{39!}{26!52!}$ **B)** $\dfrac{26!}{13!39!}$ **C)** $\dfrac{39!39!}{26!52!}$ **D)** $\dfrac{26!26!}{13!39!}$ **E)** $\dfrac{39!13!}{52!}$

15) Soninha tem muitos cartões, todos com o mesmo desenho em uma das faces. Ela vai usar cinco cores diferentes (verde, amarelo, azul, vermelho e laranja) para pintar cada uma das cinco partes do desenho, cada parte com uma cor diferente, de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Na figura abaixo, por exemplo, os cartões são iguais, pois um deles pode ser girado para se obter o outro. Quantos cartões diferentes Soninha conseguirá produzir?



A) 16 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 60 **E)** 120

16) Dado o quadrilátero $ABCD$ tal que $\angle CAD = 25°$, $\angle ACD = 45°$ e $\angle BAC = \angle BCA = 20°$, qual o valor do ângulo $\angle DBC$?

A) 40° **B)** 45° **C)** 50° **D)** 55° **E)** 60°

17) No triângulo PQR isósceles, com $PQ = PR = 3$ e $QR = 2$, a tangente à sua circunferência circunscrita no ponto Q encontra o prolongamento do lado PR em X. O valor de RX é:

A) $\frac{16}{5}$ **B)** $\frac{12}{5}$ **C)** $\frac{8}{3}$ **D)** $\frac{9}{2}$ **E)** $\frac{9}{4}$

18) Dado um triângulo ABC de lados $AB = 3$, $BC = 4$ e $AC = 5$. Sejam R_1 e R_2, respectivamente, os raios da circunferência inscrita e da circunferência com centro sobre o lado BC que passa por B e é tangente ao lado AC. A razão $\frac{R_1}{R_2}$ vale:

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{8}{9}$ **E)** $\frac{4}{5}$

19) Qual o número de soluções reais do sistema

$$x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1 \qquad \text{e} \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 1,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de x?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** infinitas

20) Um número de quatro dígitos é dito *paladino* se é múltiplo de 9 e nenhum de seus dígitos é nulo. Quantos números paladinos existem?

A) 1284 **B)** 1024 **C)** 849 **D)** 1109 **E)** 729

21) Considere a função f, definida no conjunto dos números reais e satisfazendo $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, para todo $x \neq -3/2$. Determine o número de tais funções f para as quais $f(f(x)) = x$, para todo x tal que $f(f(x))$ está bem definida.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** infinitas.

22) O brinquedo favorito de Cícero é um cone reto de vidro com 5 cm de altura. Cícero encheu o cone com areia até a altura de 3 cm, como mostrado na figura 1. Em seguida, Cícero fechou a base do cone e virou-o de cabeça para baixo, como indicado na figura 2. A que altura da base do cone, em cm, ficou a marca de areia?

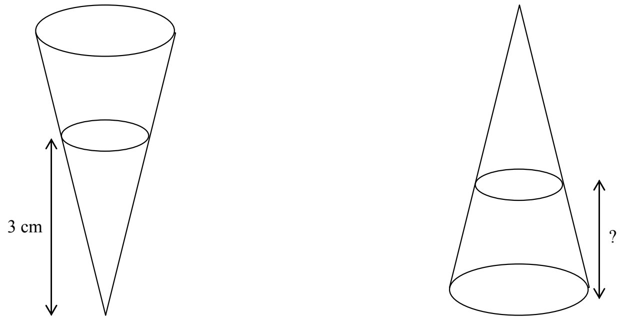


Figura 1 Figura 2

A) 1 **B)** 2 **C)** $5-\sqrt[3]{98}$ **D)** $\sqrt[3]{98}$ **E)** $1-\frac{\sqrt[3]{98}}{5}$

23) Abaixo temos um quadrado mágico multiplicativo, onde o produto dos números em cada linha, coluna e diagonal é o mesmo e igual ao número de quatro dígitos ABCD, onde cada letra representa um dígito e cada casa contém um número inteiro. Se AC representa o número de dois dígitos no centro do quadrado, a soma A + B + C + D vale:

		4
	AC	
	C	**24**

A) 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

24) Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila?

A) 256 **B)** 768 **C)** 1260 **D)** 512 **E)** 2560

25. Cinco inteiros positivos a, b, c, d, e maiores que um satisfazem as seguintes condições:

$$a(b+c+d+e)=128$$
$$b(a+c+d+e)=155$$
$$c(a+b+d+e)=203$$
$$d(a+b+c+e)=243$$
$$e(a+b+c+d)=275$$

Quanto vale a soma $a+b+c+d+e$?

A) 9 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 36 **E)** 49