XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – MG – PA – RS – RN – SC

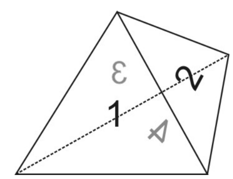
12 de junho de 2010

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros ou ainda o uso do telefone celular.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1. Dividindo-se o número $4^{(4^2)}$ por 4^4 obtemos o número:
A) 2 **B)** 4^3 **C)** 4^4 **D)** 4^8 **E)** 4^{12}

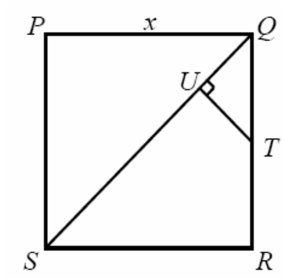
2. Qual dos seguintes números é um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
A) 42 **B)** 45 **C)** 52 **D)** 85 **E)** 105

3. As quatro faces de um dado são triângulos equiláteros, numerados de 1 a 4, como no desenho. Colando-se dois dados iguais, fazemos coincidir duas faces, com o mesmo número ou não. Qual dos números a seguir **não** pode ser a soma dos números das faces visíveis?
A) 12 **B)** 14 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19



4. Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido $\frac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{2}{3}$

5. Um quadrado *PQRS* tem lados medindo *x*. *T* é o ponto médio de *QR* e *U* é o pé da perpendicular a *QS* que passa por *T*. Qual é a medida de *TU*?



A) $\frac{x}{2}$ **B)** $\frac{x}{3}$ **C)** $\frac{x}{\sqrt{2}}$ **D)** $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ **E)** $\frac{x}{4}$

6. Os números *x* e *y* são distintos e satisfazem $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. Então *xy* é igual a
A) 4 **B)** 1 **C)** –1 **D)** –4 **E)** é preciso de mais dados

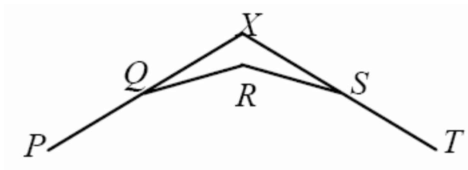
7. Considere todos os números de três algarismos *distintos*, cada um igual a 0, 1, 2, 3 ou 5. Quantos desses números são múltiplos de 6?

A) 4 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

8. O máximo divisor comum de todos os números que são o produto de cinco ímpares positivos consecutivos é

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 15 **E)** 105

9. Os pontos P, Q, R, S e T são vértices de um polígono regular. Os lados PQ e TS são prolongados até se encontrarem em X, como mostra a figura, e $Q\hat{X}S$ mede 140º. Quantos lados o polígono tem?



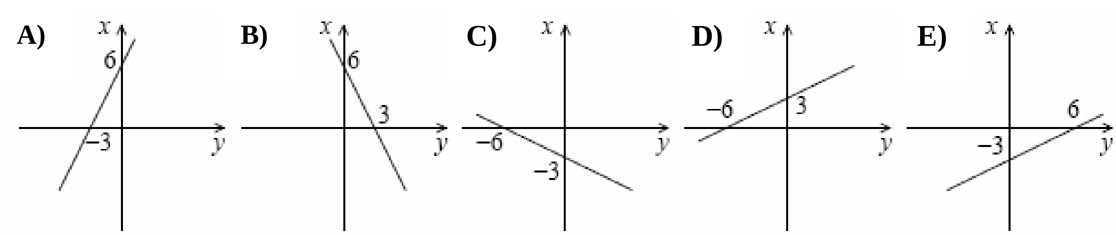
A) 9 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 40

10. Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:

Arnaldo: “Eu tenho quatro cartas com o mesmo número.”
Bernaldo: “Eu tenho as cinco cartas vermelhas.”
Cernaldo: “As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V.”
Dernaldo: “Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número.”
Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

A) Arnaldo **B)** Bernaldo **C)** Cernaldo **D)** Dernaldo **E)** Não é possível definir.

11. Esmeralda ia desenhar o gráfico de $y = 2x + 6$ mas trocou os eixos de lugar. Como fica o desenho dessa relação com os eixos trocados de lugar?



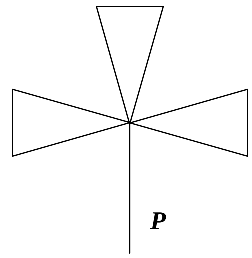
12. Qual das seguintes frações é mais próxima de $\sqrt{7}$?

A) $\frac{3}{1}$ **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{8}{3}$ **D)** $\frac{13}{5}$ **E)** $\frac{18}{7}$

13. No triângulo ABC, $m(B\hat{A}C) = 140º$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo $N\hat{M}P$?

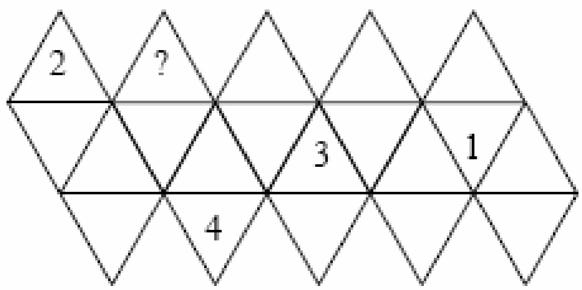
A) 40º **B)** 50º **C)** 70º **D)** 90º **E)** 100º

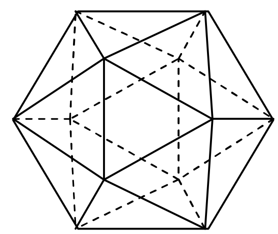
14. De quantas maneiras é possível desenhar a figura a seguir sem tirar o lápis do papel (ou qualquer outro utensílio, se você preferir!) começando de P e sem passar sobre o mesmo ponto mais de uma vez, com exceção do ponto comum aos três triângulos?



A) 48 **B)** 24 **C)** 16 **D)** 108 **E)** 27

15. A figura a seguir foi recortada em cartolina e depois dobrada para formar um icosaedro. As faces em branco foram numeradas de modo que ao redor de cada vértice (pontas do sólido) apareçam os números de 1 a 5. Qual número está na face com a interrogação?





ICOSAEDRO

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

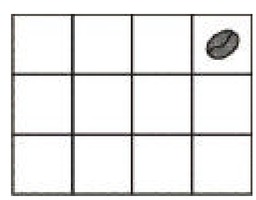
16. Os números a e b são reais não negativos tais que $a^3 + a < b - b^3$. Então

A) $b < a < 1$
B) $a = b = 1$
C) $a < 1 < b$
D) $a < b < 1$
E) $1 < a < b$

17. Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?

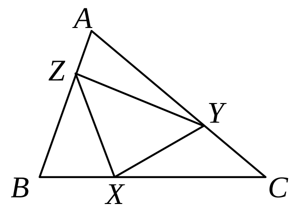
A) 1000 **B)** 1001 **C)** 1002 **D)** 1003 **E)** 1004

18. A figura representa uma barra de chocolate que tem um amendoim apenas num pedaço. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?



A) Escolher a primeira coluna à esquerda.
B) Escolher as duas primeiras colunas à esquerda.
C) Escolher a terceira linha, de cima para baixo.
D) Escolher as duas últimas linhas, de cima para baixo.
E) Qualquer uma, já que Fábio forçosamente ficará com o amendoim.

19. Seja ABC um triângulo e X, Y e Z pontos sobre os lados BC, CA, AB tais que $\frac{CX}{XB} = \frac{AY}{YC} = \frac{BZ}{ZA} = 2$.



A razão entre as áreas do triângulo XYZ e do triângulo cujos lados são congruentes às medianas de ABC é

Obs.: as medianas de um triângulo são os segmentos que ligam os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados opostos.

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{4}$

20. Para cada subconjunto A de $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, seja $p(A)$ o produto de seus elementos. Por exemplo, $p(\{1;2;4;5\}) = 40$ e $p(A) = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$. Por convenção, adote $p(\varnothing) = 1$. A soma de todos os 2^{10} produtos $p(A)$ é igual a:

A) 2^{11} **B)** $11!$ **C)** 11^{11} **D)** $2^{11!}$ **E)** $11^{2!}$

21. Sendo $n = 2010^{2010}$ e $\log n$ é igual ao número m tal que $10^m = n$, então

A) $n! < n^{\log n} < (\log n)^n$

B) $n^{\log n} < n! < (\log n)^n$

C) $(\log n)^n < n^{\log n} < n!$

D) $(\log n)^n < n! < n^{\log n}$

E) $n^{\log n} < (\log n)^n < n!$

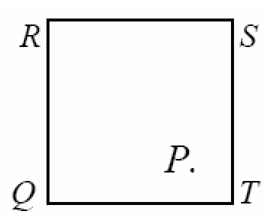
22. Quatro números inteiros positivos $a < b < c < d$ são tais que o mdc entre quaisquer dois deles é maior do que 1, mas $\text{mdc}(a, b, c, d) = 1$. Qual é o menor valor possível para d?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 30 **E)** 105

23. Qual é o maior valor de xy^2 se x e y são reais positivos cuja soma é 3?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

24. Um ponto P é escolhido ao acaso no interior de um quadrado $QRST$. Qual é a probabilidade do ângulo $R\hat{P}Q$ ser agudo?



A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\sqrt{2} - 1$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{p}{4}$ **E)** $1 - \frac{p}{8}$

25. Qual é o menor valor positivo de $21m^2 - n^2$ para m e n inteiros positivos?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7