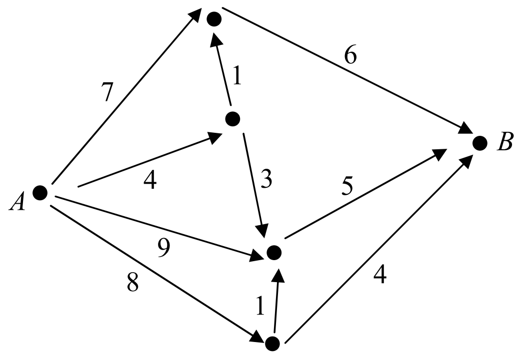
XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – MG – PA – RS – RN – SC

18 de junho de 2011

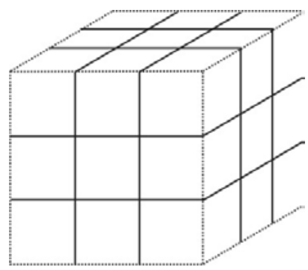
A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) A figura ao lado representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade A e chega na cidade B?



A) 11 **B)** 14 **C)** 12
D) 10 **E)** 15

2) Um cubo de madeira, pintado de vermelho, foi serrado em 27 cubos menores iguais e as faces desses cubos ainda não pintadas o foram de branco. Qual é a razão entre a área da superfície total pintada em vermelho e a área da superfície total pintada de branco?



A) 1:2 **B)** 1:1 **C)** 2:1 **D)** 1:3
E) 2:3

3) Numa padaria, uma lata de 200g de achocolatado em pó CHOCOBM custa R$3,00, uma lata de 400g custa R$5,00 e a de 800g custa R$9,00. Lara precisa de 1,2kg de CHOCOBM para fazer um enorme bolo. Qual das opções a seguir é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM nessa padaria?

A) 6 latas de 200g
B) 1 lata de 400g e 1 lata de 800g
C) 4 latas de 200g e 1 lata de 400g
D) 2 latas de 200g e 1 lata de 800g
E) 2 latas de 200g e 2 latas de 400g

4) Os inteiros positivos 30, 72 e N possuem a propriedade de que o produto de quaisquer dois é divisível pelo terceiro. Qual o menor valor possível de N?
A) 60 **B)** 30 **C)** $30 \cdot 72$ **D)** 360 **E)** 6

5) Numa classe de 36 alunos, todos têm alturas diferentes. O mais baixo dos meninos é mais alto do que cinco meninas, o segundo menino mais baixo é mais alto do que seis meninas, o terceiro menino mais baixo é mais alto do que sete meninas e assim por diante, observando-se que o mais alto dos meninos é mais alto do que todas as meninas. Quantas meninas há nessa classe?
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

6) Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)
A) Vinte e quatro. **B)** Trinta e seis. **C)** Quarenta e dois.
D) Quarenta e oito. **E)** Cinquenta e seis.

7) Sendo a e b reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\frac{ab}{a+b}$ pode assumir é

A) 0 **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 1

8) Por conta de uma erupção de um vulcão, 10% dos voos de um aeroporto foram cancelados. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva. Que porcentagem do total de voos deste aeroporto foram cancelados?
A) 28% **B)** 30% **C)** 35% **D)** 38% **E)** 70%

9) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?
A) 2×20112007^2 **B)** 2×20112003^2 **C)** 2×20112007
D) 2×20112003 **E)** 2×20112011^2

10) Luca comprou uma revista por R$9,63 e deu uma nota de R$10,00 para pagar. De quantas maneiras ele pode receber o troco de 37 centavos em moedas, se as moedas disponíveis no caixa são as de 1, 5, 10 e 25 centavos? Suponha que há muitas moedas de cada tipo.
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 24 **E)** 30

11) Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

12) Em um triângulo ABC com $m(A\hat{B}C) - m(B\hat{A}C) = 50^\circ$, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $m(C\hat{D}E) = 90^\circ$. A medida do ângulo $A\hat{D}E$ é:
A) 25° **B)** 30° **C)** 40° **D)** 45° **E)** 50°

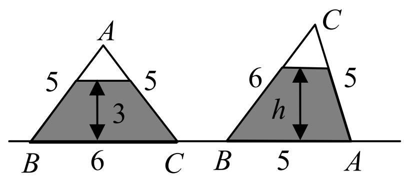
13) Esmeralda tem 11 notas de dois reais, Rosa tem 7 notas de cinco reais e Nelly tem 3 notas de dez reais. Qual é o menor número possível do total de notas que devem mudar de mãos de forma que todas as moças fiquem com a mesma quantia?
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

14) Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\frac{1}{5^{12}}$?
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

15) No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

X: "Hoje está chovendo."
Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo."
Z: "Hoje não está chovendo."
W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds."
Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16) Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados $BC = 6$ cm e $AB = AC = 5$ cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado BC, a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o peso de papel se apoia sobre o lado AB?



A) $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{18}{5}$ **E)** $\frac{24}{5}$

17) O maior inteiro positivo n tal que $(2011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$ é:
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

18) A calculadora de Esmeralda está quebrada: quando ela aperta o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$, a calculadora faz, ao acaso, uma das duas seguintes operações: tirar a raiz quadrada (como deveria fazer) ou dividir o número por 100 (como não deveria fazer). Esmeralda digitou o número 201120112011 na calculadora e começou a apertar o botão $\boxed{\sqrt{\ }}$ repetidamente. Quantas vezes, no máximo, Esmeralda aperta o botão até aparecer pela primeira vez um número menor que 2?
A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

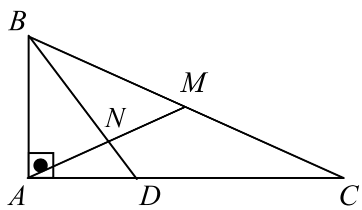
19) Existem 3 valores inteiros positivos de $n > 1$ tais que 10 pode ser escrito como soma de n inteiros positivos e distintos:

$n = 2$: $10 = 3 + 7$
$n = 3$: $10 = 2 + 3 + 5$
$n = 4$: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Quantos valores inteiros e positivos de $n > 1$ existem para os quais é possível expressar 2011 como soma de n inteiros positivos e distintos?
A) 59 **B)** 60 **C)** 61 **D)** 62 **E)** 63

20) Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

21) Seja ABC um triângulo retângulo em A. O ponto D pertence ao lado AC e é tal que $BD = CD$. Sejam M o ponto médio de BC e N a interseção de AM e BD. Sendo N o ponto médio de AM, qual a medida, em graus, do ângulo $B\hat{C}A$?
A) 15 **B)** 22,5 **C)** 30 **D)** 37,5 **E)** 45



22) Sendo a e b inteiros tais que $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2011} = a + b\sqrt{2}$, $\left(1-\sqrt{2}\right)^{2010}$ é igual a

A) $a + 2b + (a - b)\sqrt{2}$ **B)** $a - 2b + (a - b)\sqrt{2}$ **C)** $a + 2b + (b - a)\sqrt{2}$

D) $2b - a + (b - a)\sqrt{2}$ **E)** $a + 2b - (a + b)\sqrt{2}$

23) Se a, b e c são inteiros positivos tais que $a \le b \le c$ e $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2011}$, qual é o menor valor possível de a?

A) 2011 **B)** 2012 **C)** 2013 **D)** 2014 **E)** $2011 \cdot 2012$

24) Três polígonos regulares, de 8, 12 e 18 lados respectivamente, estão inscritos em uma mesma circunferência e têm um vértice em comum. Os vértices dos três polígonos são marcados na circunferência. Quantos vértices distintos foram marcados?

A) 20 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 30

25) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível (ou seja, cujos vértices pertencem a uma circunferência) com $AB = 4$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{13}$ e $AD = 2\sqrt{13}$. Sendo E a interseção das diagonais AC e BD, o comprimento do segmento BE é:

A) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ **B)** $\frac{13\sqrt{3}}{7}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ **E)** $\frac{16\sqrt{3}}{7}$