XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) E	6) C	11) E	16) D	21) E
2) B	7) B	12) C	17) E	22) C
3) E	8) D	13) D	18) A	23) B
4) E	9) D	14) A	19) C	24) E
5) D	10) B	15) D	20) B	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. Resposta

$$\frac{4^{\left(4^2\right)}}{4^4} = 4^{4^2-4} = 4^{16-4} = 4^{12}$$

2. Resposta

Qualquer divisor positivo de $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ deve ter a forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, com a, b e c inteiros, $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$ e $0 \le c \le 3$. Apenas $45 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ é dessa forma. Cada um dos outros números possui um fator primo diferente de 2, 3 e 5.

3. Resposta

Somar os números de todas as faces visíveis é o mesmo que somar todos os números dos dois dados exceto os dois que estão em faces coladas, então a soma será $2(1+2+3+4) - a - b$, onde a e b são os números nas faces coladas. Essa soma é igual a $20 - a - b$, que pode assumir qualquer valor entre 12 ($a = b = 4$) e 18 ($a = b = 1$), portanto nunca será 19.

4. Resposta

Quando Ana andar 3/4 da escada, Beatriz terá andado 1/4 da mesma. Isso significa que Ana é três vezes mais rápida para descer do que Beatriz para subir. Quando Ana andar mais 1/4 da escada e terminar, Beatriz terá andado mais um terço disso, que é 1/12. Assim, Beatriz andou 4/12 da escada, então ainda terá que subir 8/12 = 2/3 dela.

5. Resposta

Os triângulos QSR e QTU são semelhantes. Então, $\dfrac{TU}{SR} = \dfrac{QT}{QS} \Leftrightarrow \dfrac{TU}{x} = \dfrac{x/2}{\sqrt{x^2 + x^2}} \Leftrightarrow TU = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.

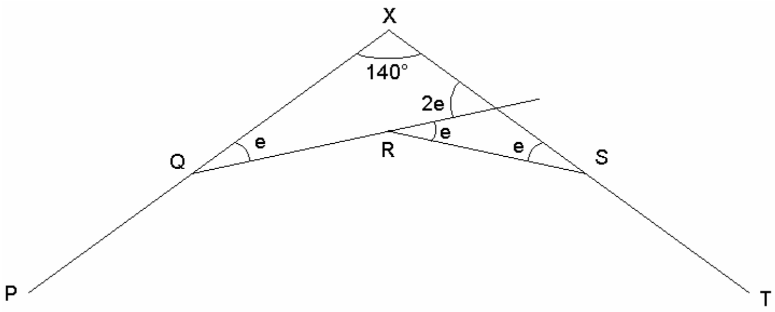
6. Resposta

Temos $x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x - y = \dfrac{y-x}{xy}$, mas podemos cancelar a diferença, que é diferente de zero, então $1 = \dfrac{-1}{xy} \Leftrightarrow xy = -1$.

7. Resposta
Para um número ser divisível por 6, seu algarismo das unidades deve ser par e a soma de seus algarismos deve ser divisível por 3. Como a soma dos cinco números é 11, que deixa resto 2 ao ser dividido por 3, concluímos que os dois números que devem ficar de fora devem deixar resto 0 e resto 2 na divisão por 3, pois há apenas um que deixa resto 1 na divisão por 3. As possibilidades para os dois algarismos excluídos são as seguintes:
0 e 2: sem algarismos pares não podemos formar um múltiplo de 6.
0 e 5: podemos formar 132 e 312.
3 e 2: podemos formar 150 e 510.
3 e 5: podemos formar 120, 210 e 102 (012 tem apenas dois algarismos e não serve).
No total, temos 7 números.

8. Resposta
Seja d o *mdc* de todos esses números. A cada 5 números ímpares consecutivos há algum divisível por 5, e por serem mais de 3 há também algum divisível por 3. Assim sendo, sempre temos o fator 15 nesses números, então $d \geq 15$. Como d deve dividir o *mdc* dos números $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ e $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$, que é igual a 15, então $d \leq 15$. Logo, $d = 15$.

9. Resposta
Prolongue QR até encontrar o segmento XS. Através da figura, podemos encontrar o valor do ângulo externo do polígono, que deve ser 360° dividido pelo número de lados n.



$$3e + 140° = 180° \Leftrightarrow 3e = 40° \Leftrightarrow \frac{360°}{n} = \frac{40°}{3} \Leftrightarrow n = 27$$

10. Resposta
Se a afirmação falsa fosse de Cernaldo ou de Dernaldo, significaria que Arnaldo e Bernaldo fizeram afirmações verdadeiras. Mas se Bernaldo tivesse todas as cartas vermelhas, só haveria 3 números disponíveis para Arnaldo pegar. Então, a afirmação falsa só pode ser de Arnaldo ou de Bernaldo.
Se a afirmação falsa foi de Arnaldo, Bernaldo deve ter as 5 cartas vermelhas, então sobram as 5 cartas verdes para Cernaldo. Mas assim não há como Dernaldo possuir 3 cartas de um mesmo número. A afirmação falsa não pode ser de Arnaldo.
Se a afirmação falsa foi de Bernaldo, então podemos montar a seguinte tabela de cartas e assinalar a inicial de quem possui cada uma

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Azul	A	B	B	D	D
Amarelo	A	B	B	D	D
Verde	A	C	C	B	D
Vermelho	A	C	C	C	A

Assim, só Bernaldo pode ter feito a afirmação falsa.

11. Resposta
Segundo a equação correta, quando y = 0, temos x = -3, e quando x = 0, temos y = 6, assim a reta deveria passar pelos pontos (-3, 0) e (0, 6). Ao trocar os eixos de lugar, as coordenadas de cada ponto são trocadas, então a reta que Esmeralda desenhou passa por (0, -3) e (6, 0).

12. Resposta
Vamos calcular os valores das alternativas na base decimal:

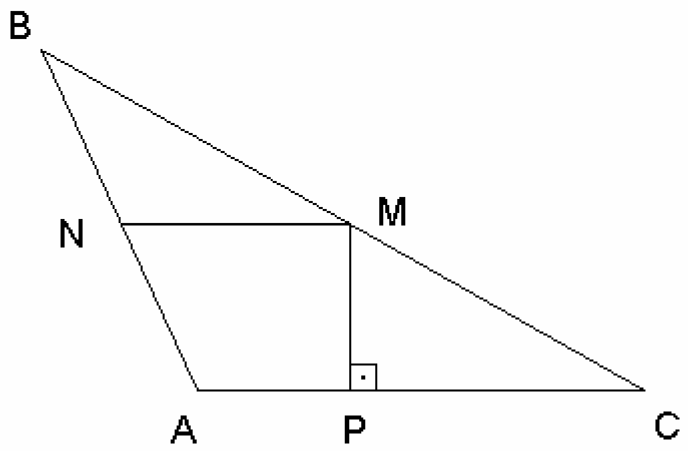
3/1 = 3 5/2 = 2,5 8/3 = 2,66... 13/5 = 2,6 18/7 = 2,57...

Sabemos que $26^2 = 676$ e $27^2 = 729$. Vamos procurar o algarismo decimal depois da vírgula *x* do número 26,x que faça uma aproximação melhor da raiz de 700.

$$\left(26+\frac{x}{10}\right)^2 = 676 + 5{,}2x + \frac{x^2}{100}$$

Vamos escolher *x* tal que 5,2*x* fique próximo de 23. Usamos, por exemplo, *x* = 4, assim ficamos com a aproximação $26{,}4^2 = 696{,}96 \Leftrightarrow 2{,}64^2 = 6{,}9696$. Com essa aproximação de $\sqrt{7}$, que tem dois dígitos depois da vírgula, já é possível concluir que 8/3 é o número mais próximo de $\sqrt{7}$.

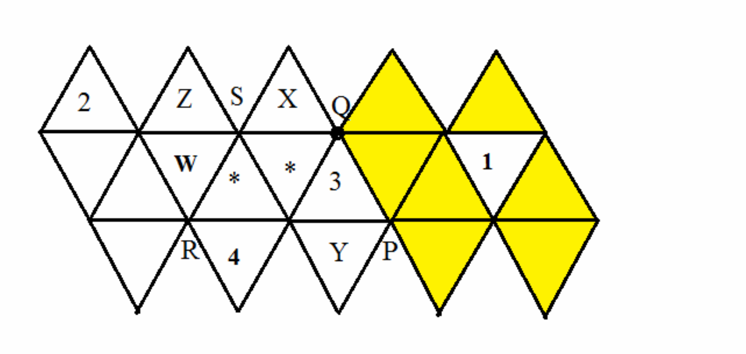
13. Resposta



Os triângulos BNM e BAC são semelhantes pelo caso LAL, então os segmentos AC e NM são paralelos. Assim, os ângulos NMP e MPC devem ser iguais, e como MPC é igual a 90°, temos que NMP também é igual a 90°.

14. Resposta
Iremos representar os três triângulos com as letras da bússola: *O*, *N*, *L*. Para desenhar qualquer lado de um triângulo, somos obrigados a desenhar todos os outros lados. A princípio devemos escolher uma ordem para desenhar os triângulos. Podemos fazer isso de 6 maneiras que correspondem as permutações possíveis das letras *O*, *N* e *L*. Podemos desenhar cada triângulo de duas maneiras a partir do ponto central, logo o total de maneiras de desenharmos a figura é $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

15. Resposta

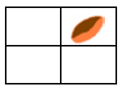


As faces destacadas, partilham um vértice com a face marcada com 1, portanto não podem ser iguais a 1. Assim, observando o vértice P, $Y = 1$. Logo as casas marcadas com * são 2 e 5, em alguma ordem, e, observando o vértice Q, $X = 1$.
Por fim, no vértice R, $W \neq 4$, de modo que $Z = 4$.

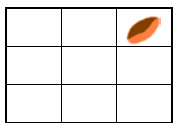
16. Resposta
Como $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $0 \leq a^3 + a < b - b^3 \Rightarrow b^3 < b \Leftrightarrow b^2 < 1 \Leftrightarrow b < 1$. Também temos $a < a^3 + a < b - b^3 < b \Rightarrow a < b$ e assim $a < b < 1$.

17. Resposta
Se $x^2 - y^2 = 2^{2010} \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 2^{2010}$. Cada fator é inteiro e deve ser uma potência de 2: $x - y = 2^a$ e $x + y = 2^b$ com $a + b = 2010$ e $a < b$. Resolvendo o sistema, $x = 2^{b-1} - 2^{a-1}$ e $y = 2^{b-1} + 2^{a-1}$, assim precisamos ter também a condição $a \geq 1$ para que as soluções sejam inteiras. Os possíveis pares (a, b) são (1, 2009), (2, 2008), (3, 2007), ..., (1003, 1007) e (1004, 1006), e como cada par (a, b) leva a um par (x, y) de forma única, temos no total 1004 soluções.

18. Resposta
Quem deixar a barra de chocolate no formato a seguir obriga o outro a comer o amendoim:



Se Elias pegar a coluna mais à esquerda, o chocolate vira um quadrado de lado 3:

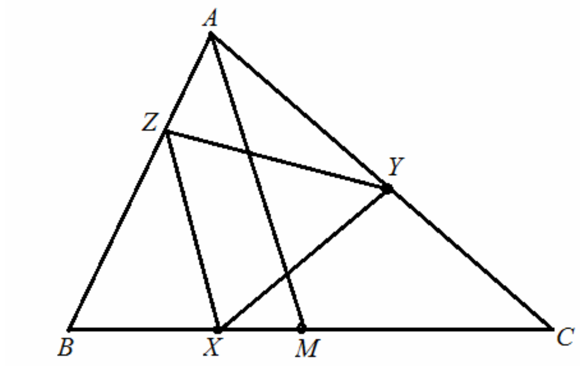


A partir de agora, se Fábio pegar a coluna à esquerda, Elias pega a linha de baixo e não come o amendoim. Se Fábio pegar as duas colunas da esquerda, Elias pega as duas linhas de baixo e não come o amendoim. Um raciocínio análogo demonstra que Fábio também fica com o amendoim se pegar as colunas de baixo.
Qualquer outra repartição inicial de Elias permite que Fábio deixe apenas o amendoim ou o chocolate quadrado de lado 2, o que também obriga Elias a ficar com o amendoim. Assim, Elias precisa começar da coluna mais à esquerda.

19. Resposta

Seja M o ponto médio de BC como $\frac{CX}{BX} = 2$, $CX = \frac{2}{3}BC$ e $BX = \frac{1}{3}BC$, de modo que $XM = BM - BX = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{6}BC = \frac{1}{2}BX$.

Assim, $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BX}{XM} = 2$, de modo que $\Delta BXZ \sim \Delta BMA \Rightarrow \frac{XZ}{MA} = \frac{BX}{BM} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{2}{3}$.



Logo os lados de XYZ são iguais a $\frac{2}{3}$ das medianas de ABC. Assim, XYZ e o triângulo cujos lados são congruentes às medianas de ABC são semelhantes de razão $\frac{2}{3}$ e a razão entre suas áreas é $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

20. Resposta

Seja s(A) a soma dos produtos dos elementos de cada subconjunto de A. Para cada escolha de um produto x sem o fator 10 existe outro produto com o fator 10, que é 10x, assim podemos dizer que s({1;2;...;10}) = s({1;2;...;9}) + 10 · s({1;2;...;9}) = 11 · s({1;2;...;9}). De forma análoga, temos que s({1;2;...;9}) = s({1;2;...;8}) + 9 · s({1;2;...;8}) = 10 · s({1;2;...;8}), e assim por diante.
Assim, s(A) = 11 · s({1;2;...;9}) = 11 · 10 · s({1;2;...;8}) = ... = 11 · 10 ·...· 3 · s({1}) = 11!.

21. Resposta

Observe as seguintes desigualdades:

$$2010^{2010} = 2^{2010}.1005^{2010} = 1024^{201}.1005^{2010} > \left(10^3\right)^{201}.\left(10^3\right)^{2010} = 10^{6633}$$
$$2010^{2010} < 10000^{2010} = 10^{8040}$$

Podemos concluir que $6633 < \log n < 8040$. Assim:

$$n^{\log n} = 10^{m^2} < 10^{8040^2} < 10^{3.10^{6633}} = 1000^{10^{6633}} < 6633^{10^{6633}} < m^{10^m} = (\log n)^n$$

Agora, observe as seqüências $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ e $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$. A segunda sequência possui razão 10 entre termos consecutivos, enquanto que na primeira a razão é no máximo 4, assim podemos afirmar que $10^N > N^2$ para todo inteiro positivo *N*. Então:

$$(n!)^2 = (1.n)(2.(n-1))(3.(n-2))\ldots((n-1).2)(n.1) \geq n^n > (\log n)^{2n}$$

Essas desigualdades se devem a $(n+1-k).k \geq n$ para todo *k* tal que $1 \leq k \leq n$ e

$$10^m > m^2 \Leftrightarrow n > (\log n)^2 \Leftrightarrow n^n > (\log n)^{2n}$$

22. Resposta

Nenhum dos inteiros em questão é uma potência de um primo *p* pois caso contrário todos os outros inteiros teriam o fator *p* em comum e isso não é permitido. Logo *d* possui pelo menos dois fatores primos distintos. Além disso, um dos números *a*, *b*, *c*, *d* é ímpar; caso contrário mdc (*a*, *b*, *c*, *d*) = 2. Assim, como o menor número ímpar com dois fatores primos distintos é 15, $d \geq 15.$ Para *d* = 15, temos como exemplo *a* = 6, *b* = 10, *i* = 12 e *d* = 15.

23. Resposta

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, temos que $\frac{2x+y+y}{3} \geq \sqrt[3]{2xy^2} \Leftrightarrow$

$\frac{2(x+y)}{3} \geq \sqrt[3]{2xy^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2xy^2} \leq 2 \Leftrightarrow xy^2 \leq 4$, com possibilidade de igualdade se $x = 1$ e $y = 2$.

24. Resposta

O ângulo RPQ é agudo se, e somente se, P está fora da circunferência com diâmetro RQ. A probabilidade pedida é a razão entre a área da região externa à circunferência (e interna ao quadrado) e a área total do quadrado. Sendo 2*r* o valor do lado do quadrado, a probabilidade é $\frac{(2r)^2 - r^2\pi/2}{(2r)^2} = 1 - \frac{\pi}{8}$.

25. Resposta

Observe que $21 \cdot 2^2 - 9^2 = 84 - 81 = 3$, portanto só nos resta verificar se é possível obter os inteiros 1 e 2. Se $21m^2 - n^2 = 2$, precisamos ter *m* e *n* com a mesma paridade. Se ambos forem pares, o resultado será divisível por 4. Se ambos forem ímpares, o resultado também será divisível por 4, pois $21(2a+1)^2 - (2b+1)^2 = 84a^2 + 84a - 4b^2 - 4b + 20$, portanto nunca poderá ser 2. Se $21m^2 - n^2 = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 7 \cdot m^2 = n^2 + 1$, teríamos que $n^2 + 1$ é múltiplo de 3, mas nenhum número dessa forma é múltiplo de 3:

$n = 3k \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$

$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$

Isso nos permite dizer que o menor valor positivo é 3.