XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) A	6) C	11) D	16) D	21) C
2) A	7) D	12) A	17) D	22) D
3) B	8) A	13) C	18) D	23) B
4) A	9) B	14) C	19) C	24) D
5) E	10) D	15) D	20) E	25) E

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1. (A) Existem 6 caminhos entre A e B com os seguintes custos de pedágio:

$7 + 6 = 13$
$4 + 1 + 6 = 11$
$4 + 3 + 5 = 12$
$9 + 5 = 14$
$8 + 1 + 5 = 14$
$8 + 4 = 12$

O valor mínimo é 11.

2. (A) Note inicialmente que pintamos 9.6 = 54 quadradinhos de vermelho. Quando serramos o cubo, temos 27 cubinhos e como cada cubinho tem 6 faces quadradas, o total de faces quadradas é igual a 6.27 = 162 quadradinhos. Destes, 54 são vermelhos e os 162 – 54 = 108 restantes são brancos. Logo, a razão entre a superfície pintada de vermelho e a superfície pintada de branco é igual a 54/108 = 1/2.

3. (B) Para decidir qual das opções é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM, vamos calcular o valor gasto em cada opção. Temos:
Na opção A), 6 latas de 200g, o valor da compra é 6 × R$3,00 = R$18,00.
Na B), 1 lata de 400g e 1 lata de 800g , o valor da compra é 1 × R$5,00 + 1 × R$9,00 = R$14,00.
Na C), 4 latas de 200g e 1 lata de 400g, o valor é 4 × R$3,00 + 1 × R$5,00 = R$17,00.
Na D), 2 latas de 200g e 1 lata de 800g, o valor é 2 × R$3,00 + 1 × R$9,00 = R$15,00.
E na E), 2 latas de 200g e 2 latas de 400g, o valor é 2 × R$3,00 + 2 × R$5,00 = R$16,00.
Ou seja, a opção B) é a mais econômica das opções apresentadas.

4. (A) Utilizaremos a notação $a|b$ para dizer que b é divisível por a. Então $30|72N \Leftrightarrow 5|12N \Leftrightarrow 5|N$. Além disso, $72|30N \Leftrightarrow 12|5N \Leftrightarrow 12|N$. Logo N é múltiplo de 5 e 12, ou seja, é múltiplo de 60. Então $N \geq 60$. Note que $N = 60$ é possível, pois $60|30 \cdot 72$.

5. (E) A proporção apresentada nos permite construir o seguinte padrão:

Meninos	Meninas	Total
1	5	6
2	6	8
3	7	10
4	8	12
5	9	14
...	...	...
15	19	34
16	20	36

Nela vemos que há 20 meninas nessa classe.

6. (C) Inicialmente, para cada opção calculemos o produto das vogais e consoantes de sua frase correspondente.

A) $6 \times 6 = 36$
B) $5 \times 6 = 30$
C) $7 \times 6 = 42$
D) $8 \times 5 = 40$
E) $7 \times 7 = 49$

A única opção que corresponde ao número mencionado na opção é a alternativa C.

7. (D) Note que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Como $0 < a \le 1$ e $0 < b \le 1$, $\frac{1}{a} \ge 1$ e $\frac{1}{b} \ge 1$ $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \frac{1}{2}$. O máximo ocorre para $a = b = 1$.

Outra maneira de resolver o problema é observar que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2}\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ é metade da média harmônica de a e b, e é máximo quando a e b são máximos, ou seja, iguais a 1.

8. (A) Seja N o número de voos.
Se 10% dos voos foram cancelados, restaram 90% de N. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva, ou seja, 20% de 90% de N = $0{,}20 \times 0{,}90 \times N = 0{,}18 \times N$ = 18% de N.
Dessa forma, a porcentagem do total de voos que foram cancelados é 28%.

9. (B) Seja $x = 20112007$. A expressão do problema é equivalente à:

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (x-4)^2 - 16x &= 2x^2 - 16x + 32\\ &= 2\left(x^2 - 8x + 16\right)\\ &= 2(x-4)^2\end{aligned}$$

Ou seja, 2×20112003^2.

10. (D) Podemos contar todas as maneiras de receber o troco de 37 centavos fazendo uma listagem de todos os recebimentos possíveis, ordenando as moedas em ordem decrescente: ou seja, dado que $37 = 25x + 10y + 5z + 1w$, basta contar quantas soluções inteiras não-negativas essa equação possui. Note que x representa o número de moedas de 25 centavos, y o número de moedas de 0 centavos, z o de 5 centavos e w o de 1 centavo. As soluções são:

$$(1,1,0,2);(1,0,2,2);(1,0,1,7);(1,0,0,12);(0,3,1,2);(0,3,0,7);(0,2,3,2);(0,2,2,7);$$

$$(0,2,1,12);(0,2,0,17);(0,1,5,2);(0,1,4,7);(0,1,3,12);(0,1,2,17);(0,1,1,22);(0,1,0,27)$$

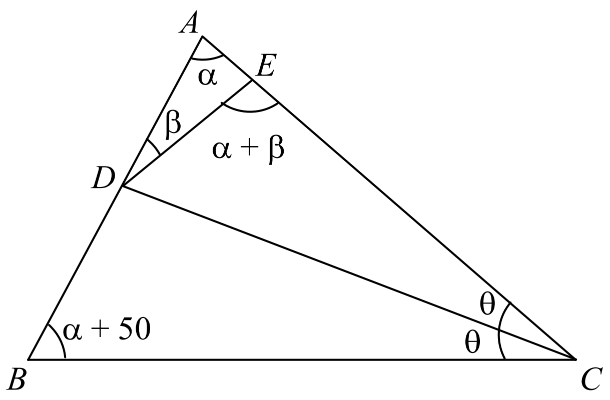
$$(0,0,7,2);(0,0,6,7);(0,0,5,12);(0,0,4,17);(0,0,3,22);(0,0,2,27);(0,0,1,32);(0,0,0,37)$$

Logo, há um total de 24 maneiras.

11. (D) As possíveis fatorações em primos de tais inteiros são: p^3 ou $p \times q$. Como esses inteiros são menores que 30, devemos ter $p,q \in \{2,3,5,7,11,13\}$. A lista de tais inteiros é $2^3, 3^3, 2\times 3,\ 2\times 5,\ 3\times 5,\ 2\times 7,\ 2\times 11,\ 2\times 13$ e 3×7.

12. (A) Sejam $\alpha = B\widehat{A}C,\ \beta = A\widehat{D}E$ e $2\theta = B\widehat{C}A$. Temos $A\widehat{B}C = 50° + \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo *BCD*: $\alpha + 50 + \theta = 90° + \beta$ (*)

Além disso, $2\alpha + 2\theta + 50 = 180$ pelo soma dos ângulos interno do ΔABC. Substituindo o valor de $\alpha + \theta = \dfrac{180-50}{2} = 65$ em (*), temos $\beta = 25$.



13. (C) Inicialmente, o dinheiro total que as moças têm é igual a 11.2 + 7.5 + 3.10 = 87, e com isso, temos que cada uma das moças deve possuir 87/3 = 29 reais. Além disso, note que Esmeralda possui 22 reais, Rose tem 35 reais e Nelly tem 30 reais. Como Rosa e Nelly possuem mais do que 29 reais, elas devem dar algumas notas a alguém – Rosa deve dar pelo menos 2 notas de 5 (se ela desse só uma nota, ela teria 30 reais, mais do que 29), e Nelly deve dar pelo menos uma nota de 10. Daí, para Rosa conseguir 29 reais ela precisa receber pelo menos 2 notas de 2 reais, e para Nelly conseguir 29 reais, ela deve receber uma nota de 5 e duas de 2 reais. Portanto, Esmeralda entrega no mínimo 4 notas de 2 reais, Rosa entrega no mínimo 2 notas de 25 reais e Nelly entrega pelo menos uma nota de 10 reais. Com isso, o número de notas que trocaram de mãos é pelo menos 7. De fato, com 7 trocas é possível que as três moças possuam 29 reais:

- Nelly entrega uma nota de 10 reais a Esmeralda;
- Rosa entrega uma nota de 5 reais a Esmeralda e outra para Nelly;
- Esmeralda entrega duas notas de 2 reais a Rosa e 2 notas de 2 reais para Nelly;

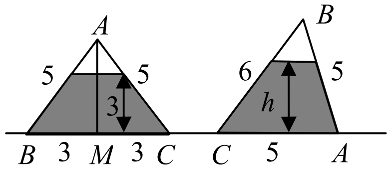
14. (C) $\frac{1}{5^{12}} = \frac{4096}{10^{12}}$ concluímos que o primeiro dígito não nulo após a vírgula de $\frac{1}{5^{12}}$ é 4.

15. (D) Se hoje está chovendo, X deve obrigatoriamente ser um OVNI – nerd. Além disso, W não pode ser um ET-nerd, pois caso contrário estaria falando a verdade em um dia de chuva. Temos então a seguinte distribuição:

(X, Y, Z, W) = (OVNI, UFO ou ET, UFO ou ET, OVNI ou UFO).
Se hoje não está chovendo, X mentiu e não pode ser um ET-nerd. As próximas três falas são verdadeiras, logo temos a seguinte distribuição.

(X, Y, Z, W) = (UFO, ET ou OVNI, ET ou OVNI, ET ou OVNI).
Portanto, é possível que haja um UFO nerd e três ET-nerds.

16. (D) Seja M o ponto médio de BC. Então, como ABC é isósceles com $AB = AC$ o segmento AM é também altura do triângulo. Logo $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4$. Como a altura da água é 3, o nível da água é igual a $\frac{3}{4}$ da altura do triângulo. Como os triângulos pequenos brancos formados pelos espaços são semelhantes ao triângulo original com a mesma razão de semelhança (raiz quadrada da razão entre as áreas, que é a mesma), a altura h é igual a $\frac{3}{4}$ da altura relativa H a B. Sendo a área de ABC igual a $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ cm^2, $\frac{AC \cdot H}{2} = 12 \Leftrightarrow 5H = 24 \Leftrightarrow H = \frac{24}{5}$ cm e $h = \frac{3}{4}H = \frac{3}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{18}{5}$ cm.



17. (D) Note que, sendo a e b inteiros positivos, $a!$ divide $b!$ se, e somente se, $a \le b$. Assim, $(2011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$ se, e somente se, $(n!)! \le 2011!$. Como o fatorial é uma função crescente nos inteiros positivos, $(n!)! \le 2011! \Leftrightarrow n! \le 2011$. Como $720 = 6! < 2011 < 7! = 5040$, temos que o valor máximo de n é 6.

18. (D) Se $10^k \le N < 10^{k+1}$ então $10^{k/2} \le \sqrt{N} < 10^{\frac{k+1}{2}}$ enquanto que $10^{k-2} \le \frac{N}{100} < 10^{k-1}$. Daí, a operação de dividir por 100 reduz mais a quantidade de dígitos do que a operação de extrair a raiz quadrada quando o número possui mais que cinco dígitos. Após as 4 primeiras operações, o número que aparece na tela é no máximo $2011{,}20112011 = x$.

Se nas próximas operações o número não for dividido por 100, precisaremos de no máximo quatro operações para obter um número menor que 2. Se na próxima operação dividirmos por 100, obteremos 20,1120112011 e nesse caso precisaremos de no máximo três operações para obtermos um número menor que 2.

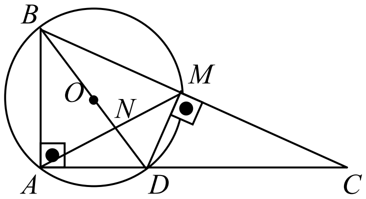
19. (C) Note que a soma de n números inteiros positivos distintos é menor ou igual a $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Assim, devemos ter $\frac{n(n+1)}{2} \le 2011 \Leftrightarrow n \le 62$. Podemos escrever 2011 como soma de n inteiros positivos distintos da seguinte forma: $2011 = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + \left(2011 - (1 + 2 + \cdots + (n-1))\right)$ (a última parcela é $2011 - (1 + 2 + \ldots + (n-1))$, pois $2011 \ge 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \Leftrightarrow 2011 - (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \ge n > n - 1$. Assim os possíveis valores de n são 2, 3, 4, …, 62, um total de 61 valores.

20. (E) No conjunto {5, 10, 20} podemos escolher no máximo dois números. No conjunto {1, 2, 3, 4} podemos escolher no máximo 3 números. Em cada um dos conjuntos {6, 12}, {7, 14}, {8, 16} e {9, 18} podemos escolher no máximo 5 números.

Logo, o total de números que podemos escolher é no máximo 2 + 3 + 4 + 5 = 14.

Um exemplo de tal conjunto é {1, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

21. (C) Como o triângulo BCD é isósceles com $BD = CD$ e M é o ponto médio da base BC, DM é também altura, ou seja, $m(D\hat{M}B) = 90^\circ$. Com isso, o quadrilátero $ABMD$ é inscritível em um círculo de diâmetro BD.



Sendo O o centro desse círculo, a corda AM é perpendicular à reta que passa por O e pelo seu ponto médio N. Assim, AM é perpendicular a ON, ou seja, AM é perpendicular a BD. Assim, BN é altura e mediana do triângulo ABM, o que implica ABM isósceles com $AB = BM$. Mas, lembrando que M é ponto médio da hipotenusa BC de ABC, temos $AM = BM = CM$. Logo o triângulo ABM é equilátero e $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{B}M) = 60^\circ$. Logo $m(A\hat{C}B) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

22. (D) Sendo a e b inteiros, utilizando o binômio de Newton temos

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2011} = a+b\sqrt{2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2011}\binom{2011}{k}\left(\sqrt{2}\right)^k = a+b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sum_{k=0}^{1005}\binom{2011}{2t}2^t \text{ e } b = \sum_{k=0}^{1005}\binom{2011}{2t+1}2^t$$

Assim,

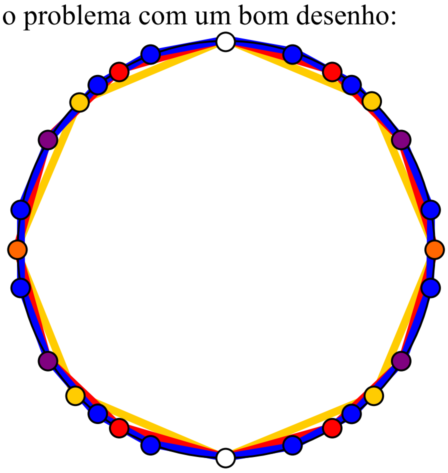
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2011} = \sum_{k=0}^{2011}\binom{2011}{k}\left(-\sqrt{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{1005}\binom{2011}{2t}2^t - \sum_{k=0}^{1005}\binom{2011}{2t+1}2^t\sqrt{2} = a-b\sqrt{2}$$

e $\left(1-\sqrt{2}\right)^{2010} = \dfrac{a-b\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{a-b\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{a-2b+(a-b)\sqrt{2}}{-1} = 2b-a+(b-a)\sqrt{2}$.

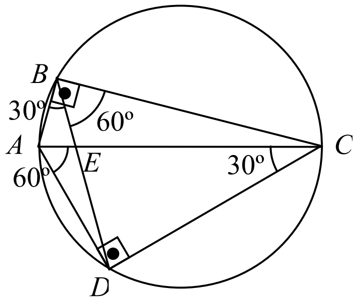
23. (B) Como $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2011} \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2011} \Leftrightarrow a > 2011$, a é pelo menos 2012. Substituindo a = 2012, encontramos $\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2011} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2011\cdot 2012}$ e podemos tomar b = c = $2\cdot 2011\cdot 2012$.

24. (D) Sejam A, B e C os conjuntos dos vértices dos três polígonos, de 8, 12 e 18 lados, respectivamente. Utilizaremos $|X|$ para denotar a quantidade de elementos do conjunto X. Então queremos calcular $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$. Mas considerando que os polígonos têm um vértice em comum, a quantidade de vértices comuns dos polígonos de m e n lados é igual a mdc(m,n), e o mesmo resultado pode ser generalizado para mais que dois polígonos. Assim, o resultado pedido é 8 + 12 + 18 – (mdc(8,12) + mdc(8,18) + mdc(12,18)) + mdc(8,12,18) = 38 – (4 + 2 + 6) + 2 = 28.

É claro que você pode resolver o problema com um bom desenho:



25. (E) Como $4^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2 = 4^2\left(1+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right) = 4^2\cdot 13 = \left(4\sqrt{13}\right)^2$, o triângulo ABC é retângulo em B. Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, o ângulo D também é reto, e AC é um diâmetro do círculo circunscrito a $ABCD$. Enfim, como AD é metade do diâmetro AC, temos $m(D\hat{A}C)$ = 60º e $m(A\hat{C}D) = 30^\circ$. Logo $m(A\hat{B}D) = 30^\circ$ e $m(D\hat{B}C) = 60^\circ$.



Sendo $\alpha = m(B\hat{A}C)$, temos, pela lei dos senos,

$$\frac{BE}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AB}{\operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow BE = \frac{4}{\operatorname{sen}(30^\circ + \alpha)/\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4}{(\operatorname{sen}30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \operatorname{sen}\alpha)/\operatorname{sen}\alpha}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{AB}{BC} + \sqrt{3}} = \frac{8}{\frac{4}{8\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$