XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática

Primeira Fase - Nível Universitário

1. (a) Encontre o valor mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{(x/e)} - x$ (Aqui $e = 2,71828\ldots$ é a base do logaritmo natural).

   (b) Qual destes números é maior: e^{π} ou π^{e}?

2. Seja $\zeta \in \mathbb{C}$ uma raiz de $x^7 - 1$, com $\zeta \neq 1$. Existe um polinômio mônico p de grau 2 com coeficientes inteiros cujas raízes são os números $z_1 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ e $z_2 = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$. Calcule $p(3)$.

3. A rã Dõ descansa sobre o vértice A de um triângulo equilátero ABC. A cada minuto a rã salta do vértice em que está para um vértice adjacente, com probabilidade p de o salto ser no sentido horário e $1 - p$ de ser no sentido anti-horário, onde $p \in (0, 1)$ é uma constante. Seja P_n a probabilidade de, após n saltos, Dõ estar novamente no vértice A.

   (a) Prove que, qualquer que seja $p \in (0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} P_n = 1/3$.

   (b) Prove que existe $p \in (0, 1/100)$ tal que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 1/\pi$.

4. Determine a quantidade de números inteiros positivos n menores ou iguais a $31!$ tais que $3^n + n$ é divisível por 31.

5. Dados os números reais a, b, c, d, considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$

   Se $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, prove que

$$\det A = f(1)f(i)f(-1)f(-i).$$

   (Aqui i representa a unidade imaginária.)

6. Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \pi/3$ e, para $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi\,(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0)}{3(n+1)}.$$

   Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots.$$