XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMATICA
Primeira Fase - Nível Universitário
3 de setembro de 2011

1. Calcule o valor de
$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}.$$

2. Encontre o volume da região definida por
$$x^2+y^2\leq 1, \qquad 0\leq z\leq 2+(x^4-6x^2y^2+y^4)^{2011}.$$

3. Zé Roberto precisa sortear alguns números primos para elaborar uma questão de teoria dos números para a Olimpíada de Matemática. Ele resolve jogar um dado comum e ir somando os pontos até alcançar um primo. Ele pede para o seu filho mais velho Umberto ir anotando as respostas.

   Da primeira vez que ele joga o dado sai o número 2. Umberto anota que o primeiro primo será $p_1 = 2$.

   No segundo lançamento sai 1. Como 1 não é primo, Zé Roberto volta a lançar o dado e desta vez sai 4. Umberto anota que o segundo primo será $p_2 = 5$.

   Zé Roberto lança o dado novamente e obtém 6. Neste momento seu segundo filho Doisberto, que assistia ao sorteio, declara: "Tenho a intuição de que o próximo primo será $p_3 = 11$.". Zé Roberto fica um pouco surpreso mas decide continuar a lançar o dado normalmente. Qual a probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar?

4. Para n natural, seja $f(n)$ o número de pares ordenados (x, y) com x, y inteiros tais que
$$3x^2-2xy+3y^2=n$$
   Calcule o valor médio de $f(n)$, ou seja, calcule
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n}.$$

5. A função $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é contínua em $[0,+\infty)$, derivável em $(0,+\infty)$ e satisfaz
$$f(x+1)=\cos(f(x))$$
   para todo $x\in[0,+\infty)$. Sabemos que $f(0) = 0$ e $f'(2) = 1$. Mostre que existe um único número real d tal que o limite abaixo exista e pertença a $(0,+\infty)$:
$$a=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x^d}.$$
   Determine os valores de d e de a.

6. Seja X uma matriz real quadrada $n\times n$. Suponha que existe um inteiro positivo m com $(X^2+I)^m = 0$.
   (a) Mostre que $n \neq 2011$.
   (b) Se $n = 2010$, é possível concluir que $X^2 + I = 0$?