XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática — 2011
Nível Universitário — Primeira Fase — Gabarito

Problema 1 Calcule o valor de

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}.$$

Solução: Para $n \geq 0$ fixo, seja

$$S_n = \sum_{m\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^m} = \sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^m} + \sum_{m\geq n}\frac{n}{3^m} = \sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^m} + \frac{n}{2\cdot 3^{n-1}} \qquad (*)$$

Assim,

$$3S_n = \sum_{0\leq m<n}\frac{m}{3^{m-1}} + \frac{n}{2\cdot 3^{n-2}} = \sum_{0\leq m<n-1}\frac{m+1}{3^m} + \frac{n}{2\cdot 3^{n-2}} \qquad (**)$$

Subtraindo $(*)$ de $(**)$, obtemos

$$2S_n = \sum_{0\leq m<n-1}\frac{1}{3^m} + \frac{n}{2\cdot 3^{n-2}} - \frac{n-1}{3^{n-1}} - \frac{n}{2\cdot 3^{n-1}} = \sum_{0\leq m\leq n-1}\frac{1}{3^m}$$

Somando a PG, obtemos

$$S_n = \frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}} &= \sum_{n\geq 0}\frac{S_n}{3^n}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n-1}} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)\\ &= \frac{9}{32}.\end{aligned}$$

Critério de Correção:

(i) Reescrever a soma, dividindo em casos e eliminando o mínimo: 2 pontos.

(ii) Encontrar o valor de S_n (ou soma similar, que reduza o problema a calcular somas de PG's simples): +5 pontos.

(iii) Conclusão: +3 pontos.

(iv) Por pequenos erros de conta, descontar no máximo 2 pontos.

Problema 2 Encontre o volume da região definida por

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 2 + (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^{2011}.$$

Solução: Em primeiro lugar, notemos que

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 8x^2y^2$$

que, em coordenadas polares, é

$$r^4 - 8\left(r\cos\theta\right)^2\left(r\sin\theta\right)^2 = r^4\left(1 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta\right) = r^4\left(1 - 2\sin^2 2\theta\right) = r^4\cos 4\theta$$

Assim, em coordenadas cilíndricas, a região fica definida por

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 2 + \left(r^4\cos 4\theta\right)^{2011}$$

onde vale a pena notar que, como $r \leq 1$, tem-se $2 + \left(r^4\cos 4\theta\right)^{2011} \geq 2 - 1 = 1$, isto é, a tampa superior do tronco de cilindro não toca a base $z = 0$.

Para encontrar o volume, basta colocar tudo em coordenadas cilíndricas

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2 + r^{8044}\cos^{2011}4\theta\right) r\ drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(r^2 + \frac{r^{8046}}{8046}\cos^{2011}4\theta\right)_{r=0}^{r=1} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{\cos^{2011}4\theta}{8046} d\theta = 2\pi + C\cdot\int_0^{8\pi}\cos^{2011}u\ du$$

Mas, fazendo a substituição $w = \sin u$

$$\int_0^{8\pi}\cos^{2011}u\ du = \int_0^0 \left(1 - w^2\right)^{1005} dw = 0$$

Portanto, o volume pedido é 2π.

Critério de Correção: Re-escrever a expressão da tampa **de maneira útil** (polares ou outra maneira): $+2$

Escrever o resto da integral em coordenadas convenientes (polares ou outras coordenadas **úteis**): $+3$

Argumento de que a tampa está acima do plano $z = 0$: $+2$ (É necessário explicar que a tampa está acima do plano para ganhar pontuação completa.)

Demonstrar que $\int\cos^{2011}u\ du = 0$ (ou equivalente): $+3$

Erros de contas podem descontar até 2 pontos (dependendo da seriedade e frequência dos erros).

Problema 3 Zé Roberto precisa sortear alguns números primos para elaborar uma questão de teoria dos números para a Olimpíada de Matemática. Ele resolve jogar um dado comum e ir somando os pontos até alcançar um primo. Ele pede para o seu filho mais velho Umberto ir anotando as respostas.

Da primeira vez que ele joga o dado sai o número 2. Umberto anota que o primeiro primo será $p_1 = 2$.

No segundo lançamento sai 1. Como 1 não é primo, Zé Roberto volta a lançar o dado e desta vez sai 4. Umberto anota que o segundo primo será $p_2 = 5$.

Zé Roberto lança o dado novamente e obtém 6. Neste momento seu segundo filho Doisberto, que assistia ao sorteio, declara: "Tenho a intuição de que o próximo primo será $p_3 = 11$.". Zé Roberto fica um pouco surpreso mas decide continuar a lançar o dado normalmente. Qual a probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar?

Solução: Para que o palpite de Doisberto venha a se confirmar, o próximo resultado do dado não pode ser 1, senão a soma até aí seria $1 + 6 = 7$, que é um primo menor que 11. Doisberto estará certo se o próximo resultado do dado após o 6 inicial for maior que 1 e alguma sequência de resultados do dado após o 6 inicial tiver soma igual a 5 (pois $11 = 6 + 5$). As sequências de resultados com essa propriedade são: $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 2)$ e $(2, 1, 1, 1)$. A probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar é, portanto, igual à probabilidade de que, após o 6 inicial, saia uma dessas sequências de resultados, a qual é

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{36} + \frac{3}{216} + \frac{1}{1296} = \frac{343}{1296}.$$

Critério de Correção:

(i) Observar que o próximo resultado do dado não pode ser 1: 1 ponto.

(ii) Observar que alguma soma dos próximos resultados do dado deve ser igual a 5: +1 ponto.

(iii) Listar corretamente todas as possíveis sequências de resultados que não começam por 1 e cuja soma é 5 (ou, equivalentemente, fazer uma árvore com todas as possibilidades): +5 pontos.

(iv) Conclusão (cálculo correto da probabilidade): +3 pontos.

Problema 4 Para n natural, seja $f(n)$ o número de pares ordenados (x, y) com x, y inteiros tais que

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = n$$

Calcule o valor médio de $f(n)$, ou seja, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)}{n}.$$

Solução: Aplicando uma rotação de 45° à curva determinada pela equação acima, obtemos

$$3\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = n$$

$$\iff \frac{x^2}{(\sqrt{n/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{n/4})^2} = 1$$

Ou seja, a curva é uma elipse com semi-eixos $\sqrt{n/2}$ e $\sqrt{n/4}$ e área

$$A_n = \pi\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{n\pi}{2\sqrt{2}}$$

Por outro lado, $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$ é igual ao número de pontos (x, y) com coordenadas inteiras tais que $3x^2 - 2xy + 3y^2 \le n-1$, ou seja, igual ao número de pontos inteiros no interior da elipse de equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 = n-1$, que é essecialmente a área A_{n-1} desta elipse.

Mais precisamente, para cada ponto inteiro (x, y) no interior da da elipse de equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 = n-1$, considere o quadrado de lados (x, y), $(x+1, y)$, $(x, y+1)$,$(x+1, y+1)$. Afirmamos que este quadrado está contido na elipse $3x^2 - 2xy + 3y^2 = n + 10\sqrt{n}$. Como $|x-y|/\sqrt{2} \le \sqrt{n/2}$ e $|x+y|/\sqrt{2} \le \sqrt{n/4}$, temos $|x|, |y| \le \sqrt{n}$ e portanto

$$3(x+1)^2 - 2(x+1)(y+1) + 3(y+1)^2 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4(x+y) + 4 \le n + 10\sqrt{n}$$

e analogamente para os demais vértices do quadrado. Assim,

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \le A_{n+10\sqrt{n}}$$

Da mesma forma, prova-se que

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \ge A_{n-10\sqrt{n}}$$

Assim, pelo sanduíche, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-10\sqrt{n}}}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+10\sqrt{n}}}{n}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)}{n} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Critério de Correção:

(i) Determinar os semi-eixos ou área da elipse: 2 pontos.

(ii) Reinterpretar o problema geometricamente, em termos de número de pontos inteiros no interior da elipse: +5 pontos.

(iii) Argumentar que $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = A_{n-1} + h(n)$ onde $h(n)/n \to 0$ quando $n \to \infty$: +2 pontos.

(iv) Conclusão: +1 ponto.

A solução só deve receber 10 pontos se for dada alguma demonstração correta e completa de que o número de pontos de coordenadas inteiras dentro da elipse é bem aproximado pela área. Se o estudante usar este fato sem demonstração ele deve receber no máximo 8 pontos.

Problema 5 A função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0,+\infty)$, derivável em $(0,+\infty)$ e satisfaz

$$f(x+1) = \cos(f(x))$$

para todo $x \in [0,+\infty)$. Sabemos que $f(0) = 0$ e $f'(2) = 1$. Mostre que existe um único número real d tal que o limite abaixo exista e pertença a $(0,+\infty)$:

$$a = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x^d}.$$

Determine os valores de d e de a.

Solução: Estritamente falando, o enunciado deste problema está incorreto: é possível que exista $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (0,\delta)$. O enunciado ficaria correto com qualquer uma das seguintes alterações:

(a) tomar $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$;

(b) considerar, no enunciado, $a = \lim_{x\searrow 0} \mid \frac{f(x)}{x^d} \mid$;

(c) pedir que $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vamos resolver o problema com esta última variação no enunciado, talvez a que menos altera o problema.

De $f(x+1) = \cos f(x)$, obtemos $f(1) = \cos f(0) = \cos 0 = 1$.

Derivando $f(x+1) = \cos f(x)$, obtemos $f'(x+1) = -\mathrm{sen}(f(x)).f'(x), \forall x > 0$. Fazendo $x = 1$, obtemos $1 = f'(2) = -\mathrm{sen}(f(1)).f'(1) = -\mathrm{sen}(1).f'(1)$, donde $f'(1) = -\frac{1}{\mathrm{sen} 1}$.

Assim, $f(1+h) = 1 - \frac{(1+r(h))h}{\mathrm{sen} 1}$, onde $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$.

Por outro lado, $\cos x = 1 - \frac{(1+s(x))x^2}{2}$, onde $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$, e logo $f(1+h) = \cos f(h) = 1 - \frac{(1+s(f(h)))f(h)^2}{2}$. Assim, para $h > 0$, temos $1 - \frac{(1+r(h))h}{\mathrm{sen} 1} = f(1+h) = 1 - \frac{(1+s(f(h)))f(h)^2}{2}$, donde

$$|f(h)| = \left(\frac{2(1+r(h))h}{(1+s(f(h)))\mathrm{sen} 1} \right)^{1/2},$$

e portanto

$$\lim_{h\searrow 0} \left| \frac{f(h)}{h^{1/2}} \right| = \left(\frac{2}{\mathrm{sen} 1} \right)^{1/2},$$

pois, como f é contínua em 0, $\lim_{h\searrow 0} s(f(h)) = \lim_{h\searrow 0} r(h) = 0$. Assim f tem sinal constante em um intervalo da forma $(0,\delta)$, $\delta > 0$ pequeno. Assim

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h)}{h^{1/2}} = \pm \left(\frac{2}{\mathrm{sen} 1} \right)^{1/2}.$$

Se $d < 1/2$,

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h)}{h^d} = \left(\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h)}{h^{1/2}} \right) \left(\lim_{h\searrow 0} h^{1/2-d} \right) = 0,$$

e, se $d > 1/2$,

$$\lim_{h\searrow 0} \left| \frac{f(h)}{h^d} \right| = \left(\lim_{h\searrow 0} \left| \frac{f(h)}{h^{1/2}} \right| \right) \left(\lim_{h\searrow 0} h^{1/2-d} \right) = +\infty$$

donde a não está definido.

Assim, temos necessariamente $d = 1/2$ e $a = \pm\sqrt{2/\mathrm{sen} 1}$.

Critério de Correção:

Mostrar que o enunciado deste problema está incorreto, i.e., mostrar que existe (ou construir) uma função f que satisfaz as condições do enunciado para a qual existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (0, \delta)$: 10 pontos.

Alternativamente, para soluções do problema que correspondam implícita ou explicitamente a uma das variações mencionadas no início da solução:

(i) Calcular $f(1)$: 1 ponto.

(ii) Calcular $f'(1)$: +1 ponto.

(iii) Observar que $\cos x = 1 - \frac{(1+s(x))x^2}{2}$, onde $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$: +2 pontos.

(iv) Comparar o comportamento assintótico de $f(1+h)$ para h perto de 0 obtido a partir da equação funcional e do cálculo de $f'(1)$ para obter

$$\lim_{h \searrow 0} \left| \frac{f(h)}{h^{1/2}} \right| = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{sen} 1}} :$$

+3 pontos.

(v) Observar que $a = \pm\sqrt{2/\mathrm{sen}1}$: +1 ponto.

(vi) Concluir, mostrando a unicidade de d: +2 pontos.

Note que o estudante que encontrar corretamente os valores de a e d mas omitir a demonstração de que $d = 1/2$ é o único valor válido deve ganhar no máximo 8 pontos.

O estudante que não observar que o enunciado está incorreto deve ganhar no máximo 9 pontos.

Problema 6 Seja X uma matriz real quadrada $n \times n$. Suponha que existe um inteiro positivo m com $(X^2+I)^m = 0$.

i) Mostre que $n \neq 2011$.

ii) Se $n = 2010$, é possível concluir que $X^2 + I = 0$?

Solução:

(i) Se $n = 2011$, então o polinômio característico de X tem grau 2011, e portanto deve ter uma raiz real. Em suma, X teria um autovetor real w associado a um autovalor real λ. Mas então:

$$\begin{aligned} \left(X^2+I\right) w &= \left(\lambda^2+1\right) w \\ \left(X^2+I\right)^m w &= \left(\lambda^2+1\right)^m w = 0 \end{aligned}$$

Como w não é nulo, devemos ter $\left(\lambda^2+1\right)^m = 0$, isto é, $\lambda^2+1 = 0$, absurdo.

(ii) Não. Em primeiro lugar, mostremos que existe uma matriz $B_{4\times 4}$ que satisfaz $\left(B^2+I\right)^2 = 0$ mas que não satisfaz $B^2+I = 0$. Por exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I + N$$

onde N é uma matriz não-nula, triangular superior e, portanto, nilpotente (aliás, $N^2 = 0$). Assim

$$B^2 + I = N \neq 0 \text{ mas } \left(B^2+I\right)^2 = N^2 = 0$$

Enfim, considere

$$X = \begin{bmatrix} B & & ... & & \\ & A & ... & & \\ & & & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix}$$

onde há um bloco $B_{4\times 4}$ e 1003 blocos $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (note que $A^2 = -I$; todas as entradas em branco são nulas). Então

$$X^2 = \begin{bmatrix} B^2 & & ... & & \\ & A^2 & ... & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & ... & A^2 & \\ & & ... & & A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I+N & & ... & & \\ & -I & ... & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & ... & -I & \\ & & ... & & -I \end{bmatrix}$$

donde

$$\left(X^2+I\right)^2 = \begin{bmatrix} N^2 & & ... & & \\ & 0 & ... & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & ... & 0 & \\ & & ... & & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Então $X^2 + I \neq 0$ mas $\left(X^2+I\right)^2 = 0$ (e $\left(X^2+I\right)^m = 0$ para $m = 2, 3, 4, ...$).

Critério de Correção:
Cada item vale 5 pontos.

(i) Justificativa da existencia de autovetor real usando que n é impar: $+2$

Uso de dito autovetor para concluir questão: $+3$

(ii) Solução do caso 4×4 ou equivalente, que seja relevante para o resto da questão: $+2$

Extensão ao caso 2010×2010: $+3$