XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1
Determine todos os valores inteiros de n para os quais a equação $x^3 - 13x + n = 0$ possua três raízes inteiras.

PROBLEMA 2
Considere as retas de equações paramétricas

$$(x, y, z) = (0,0,1) \cdot t$$
$$(x, y, z) = (1,2,0) + (1,0,0) \cdot t$$
$$(x, y, z) = (1,1,1) + (0,1,0) \cdot t$$
$$(x, y, z) = (1,0,0) + (1,1,1) \cdot t$$

Quantas retas intersectam simultaneamente as 4 retas acima?

PROBLEMA 3
Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto (a,b), com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos: (a +1, b), (a –1, b), (a,b + 1) ou (a, b – 1). De quantas maneiras Esmeralda pode sair do (0, 0) e andar 2008 passos terminando no (0,0)?

PROBLEMA 4
Suponha que existem duas matrizes inversíveis $n \times n$, A e B, diferentes da matriz identidade I e satisfazendo as relações

$$\begin{cases} A^7 = I \\ ABA^{-1} = B^2 \end{cases}$$

Mostre que existe um inteiro $k > 0$ tal que $B^k = I$ e determine o menor k com esta propriedade.

PROBLEMA 5
Dizemos que uma hipérbole cobre um ponto se este pertence a uma das duas regiões infinitas por ela determinada que contêm os focos.
Qual o menor número de hipérboles necessárias para cobrir todos os pontos do plano?

PROBLEMA 6
Seja $P_n = \sum_{0 \le k \le n} sen^n \left(\frac{pk}{n} \right)$.
Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{P_n P_{n+1}}{n}$.