

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Considere a matriz complexa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{2004} .

PROBLEMA 2

Calcule a integral: $\int_{-1}^1 \frac{x^{2004}}{1+e^x} dx$

PROBLEMA 3

Determine a equação da reta que tangencia a curva de equação $y = 3x^4 - 4x^3$ em dois pontos distintos.

PROBLEMA 4

Quantas triplas ordenadas (A, B, C) de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ existem para as quais $A \cap B \cap C = \emptyset$; $A \cap B \neq \emptyset$; $A \cap C \neq \emptyset$?

PROBLEMA 5

Considere a matriz A $n \times n$ definida por $a_{ij} = n(i-1) + j$, para todos $1 \leq i, j \leq n$.

As interseções de k linhas e k colunas quaisquer de A determinam uma *submatriz* de ordem k de A . Seja $\varphi(n)$ a soma dos determinantes de todas as submatrizes de A .

- a) Determine λ real de forma que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\lambda}$ exista e seja não nulo.
- b) Determine o valor do limite acima para o valor de λ encontrado.

PROBLEMA 6

Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$.