XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

Calcule $\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1 - x}{(e^x - 1)\cdot x} dx$

PROBLEMA 2

Seja N um inteiro positivo. Calcule, em função de N, o volume do sólido definido por:

$$\begin{cases} x, y, z \in [0, +\infty) \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor \le N \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Dada $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ duas vezes diferenciável com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}$, $\forall x \in [0,1]$, mostre que $f(1) < \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 4

Dada uma hipérbole e uma reta não paralela às assíntotas, determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da hipérbole paralelas à reta dada.

Obs: Uma *corda* de uma hipérbole é um segmento cujos extremos pertencem à hipérbole.

PROBLEMA 5

As funções $y_1(t) = (1 + t^2)\cdot e^{t^2}$, $y_2(t) = (t + t^2)\cdot e^{t^2}$ e $y_3(t) = (-1 - t + t^2)\cdot e^{t^2}$ são soluções da equação diferencial $y''(t) + a(t)\cdot y'(t) + b(t)\cdot y(t) = c(t)$, onde $a(t), b(t), c(t)$ são funções duas vezes diferenciáveis.

Determine uma função duas vezes diferenciável $y(t)$ tal que

$y''(t) + a(t)\cdot y'(t) + b(t)\cdot y(t) = c(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

PROBLEMA 6

Escolha três pontos x_1, x_2, x_3 aleatoriamente, independentemente e com distribuição uniforme no intervalo [0, 1]. Determine, em função do número positivo m, a probabilidade de que

$$\min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\} > m .$$