XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1:
Joãozinho joga repetidamente uma moeda comum e honesta. Quando a moeda dá cara ele ganha 1 ponto, quando dá coroa ele ganha 2 pontos.
Encontre a probabilidade (em função de n) de que Joãozinho em algum momento tenha exatamente n pontos.

PROBLEMA 2:
Dados números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não todos nulos, encontre o (menor) período da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx).$$

PROBLEMA 3:
Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades abaixo:

$$z \geq 3x^2 + 2y^2,\ 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$$

PROBLEMA 4:
Seja a um inteiro não nulo.
Prove que se a é uma n-ésima potência modulo $4a^2$, ou seja, existe um inteiro b tal que $a - b^n$ é múltiplo de $4a^2$, então a é uma n-ésima potência.

PROBLEMA 5:
Calcule os autovalores da matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ abaixo:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ 1 & 0 & n-1 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, $M_{i,i+1} = n + 1 - i,\ M_{i+1,i} = i,\ M_{ij} = 0$ se $|i - j| \neq 1$.
Obs: Os autovalores de M são as raízes da seguinte equação em x: $\det(M - xI) = 0$.

PROBLEMA 6:
Seja $y(t)$ uma função real de variável real tal que

$$y''(t) + e^{t^2} y'(t) + 3ty(t) = 2\text{sen}(t) + \text{tg}(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Calcule o limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{ty'(t)}{y(t) - 1}.$$