37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 1

1) C	6) A	11) D	16) C
2) D	7) C	12) C	17) D
3) E	8) B	13) E	18) A
4) E	9) B	14) B	19) A
5) B	10) D	15) A	20) E

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 20 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**

1) (C) Como o carrinho azul (A) chegou depois do marrom (M) e antes do vermelho (V), significa que (A) está entre (M) e (V), ou seja, a ordem entre eles é M – A – V. Além disso, como carrinho (B) chegou na frente do (V) e do (M), vemos então que (B) está na frente dos outros três carrinhos.
Assim, a ordem de chegada dos carrinhos B – M – A – V.

2) (D) Se para cortar um tronco reto de eucalipto em 6 partes, o madeireiro Josué faz 5 cortes e leva meia hora para fazer os cortes, vemos que cada corte é feito em 30 ÷ 5 = 6 minutos.
Portanto, para cortar outro tronco igual em 9 pedaços e precisará fazer 8 cortes. E isso levará 8 × 6 = 48 minutos.

3) (E) O valor da expressão é

$$2015^2 - 2015 \times 2014 - 2014^2 + 2014 \times 2015 =$$
$$2015^2 - 2014^2 =$$
$$(2015 + 2014)(2015 - 2014) =$$
$$(4029)(1) =$$
$$4029$$

4) (E) O valor da compra é $(50 + 50) - (27 + 9) = 100 - 36 = 64$ reais.

5) (B) De acordo com as condições, o tabuleiro ficará assim preenchido:

1	4	7
8	9	2
3	6	5

E a soma dos números escritos nos quadrados brancos será $1 + 4 + 2 + 3 + 6 = 16$.

6) (A) Como $400 = 20^2$, o quadrado menor tem lado 20 cm, e como $900 = 30^2$, o quadrado maior tem lado 30 cm. Portanto a folha de madeira tem lado $20 + 30 = 50$ cm e a sua área é $50^2 = 2500$ cm^2.

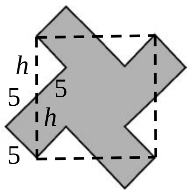
7) (C) Temos $10^{15} - 15 = 1000000000000000 - 15 = 999999999999985$. E a soma dos algarismos desse número é $13 \times 9 + 8 + 5 = 117 + 8 + 5 = 130$.

8) (B) Tal fato acontecerá mais 5 vezes em nosso século, nos anos 2024, 2033, 2042, 2051 e 2060.

9) (B) Ele precisará de 4 cores. Uma cor será para as faces superior e inferior, que são opostas, e mais três cores para a lateral. Para a lateral, como são cinco faces, pintando-as em sequência a partir de uma face qualquer, com duas cores diferentes da já usada, pode-se formar dois pares nas condições dadas, sendo necessária uma quarta cor para que a lateral tenha sempre duas faces vizinhas com cores diferentes.

10) (D) Para cada um, o gasto com a pipoca e o suco foi $(32 - 8) \div 3 = 24 \div 3 = 8$ reais e com o estacionamento foi $(32 - 14) \div 3 = 18 \div 3 = 6$ reais. Se a despesa total de cada um foi de 32 reais, o preço da entrada foi $32 - 8 - 6 = 18$ reais.

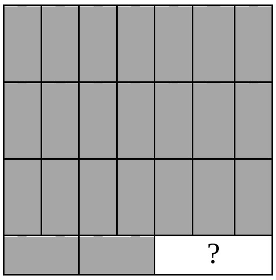
11) (D) O desenho a seguir mostra como ele procedeu para recortar a chapa.



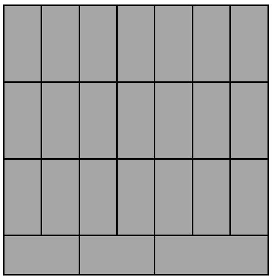
Dessa foram vemos que a metade do lado $2h$ do quadrado é igual a hipotenusa de um triângulo de catetos iguais a 5, ou seja, $h = 5\sqrt{2}$ cm. Logo o lado do quadrado é $2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm e a sua área é $\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 100 \cdot 2 = 200$ cm^2.

12) (C) Primeiro, veja que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.
Se ela colocar o 1 na casa central, ela terá que divir os demais números em quatro duplas com somas iguais a $(45 - 1) \div 4 = 44 \div 4 = 11$, que pode ser obtido colocando {2, 9}, {3, 8}, {4, 7} e {5, 6} nas "perninhas".
Se ela colocar o 2 na casa central, ela terá que dividir $45 - 2 = 43$ em quatro duplas com somas iguais a $43 \div 4 = 10{,}75$, usando números inteiros, o que é impossível. E tal fato vai se repetir com os demais números pares, 4, 6 e 8.
Agora vamos verificar os demais ímpares na casa central. Se ela colocar o 3 na casa central, ela terá que dividir os demais números em quatro duplas com somas iguais a $(45 - 3) \div 4 = 10{,}5$ usando números inteiros, o que é impossível.
Se ela colocar o 5 na casa central, ela terá que dividir os demais números em quatro duplas com somas iguais a $(45 - 5) \div 4 = 10$, que pode ser obtido com {1, 9}, {1, 8}, {3, 7} e {4, 6} nas "perninhas".
Se ela colocar o 7 na casa central, ela terá que dividir os demais números em quatro duplas com somas iguais a $(45 - 7) \div 4 = 9{,}5$ usando números inteiros, o que é impossível.
Por fim, se ela colocar o 9 na casa central, ela terá que dividir os demais números em quatro duplas com somas iguais a $(45 - 9) \div 4 = 9$, que pode ser obtido com {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5} nas "perninhas".
Portanto há 3 números que podem ocupar a casa central do X.

13) (E) Para fazer o revestimento com o maior número possível de placas, ela deve iniciar usando a maior quantidade da menor placa possível, a placa retangular 2×1 metros.
Podemos colocar 23 placas 2×1 quadrado, conforme a figura a seguir, que mostra uma maneira de preenchimento destacada em cinza.



Agora falta a região em branco. Veja que se colocarmos mais uma placa 2 × 1, restará uma região quadradra 1 × 1, contrariando as condições dadas. Portanto finalizaremos preenchendo com uma placa 3 × 1 metros, dando ao revestimento o maior número de placas possível, que é $23 + 1 = 24$.



Há outras maneiras de se distribuir as 24 placas retangulares, nenhuma quadrada.

14) (B) Ela consegue deve empilhar os 10 vermelhos mais os 15 azuis intercalando-os com $(10 + 15) + 1 = 26$ cubos verdes, de modo que dois cubos vizinhos tenham cores diferentes. Assim ela conseguirá empilhar, no máximo, $10 + 15 + 26 = 51$ cubos.

1**5) (A)** Completando a tabela, no segundo turno, todos os eleitores que votaram no partido AA mantiveram seus votos e o mesmo ocorreu com os eleitores do partido BB.
Além disso, dos que votaram no partido CC no primeiro turno, 40% de 20%, que é 8%, votaram no partido AA e os demais, 60% de 20%, que é 12%, votaram no partido BB. Até esse momento, as porcentagens para AA e BB ficam assim:

Partidos / Turnos	AA	BB	CC	Outros partidos e votos nulos
1º turno	39%	31%	20%	10%
2º turno	39% + 8% = 47%	31% + 12% = 43%	0	?

Só isso já daria vantagem ao candidato AA.
Temos que distribuir os votos dos que haviam votado em outros partidos ou anulado o seu voto. Sabe-se que 60% de 10%, que é 6%, continuaram sem votar em AA ou BB e o restante, 40% de 10%, que é 4%, votaram parte em AA e parte em BB. Mas isso não muda a vantagem do candidato AA, pois como menos de 4% optaram por votar em BB, ele obteve menos de 47% dos votos, e o restante optou pelo candidato AA.
Dessa forma, é correto afirmar que AA venceu com mais de 47% dos votos.

16) (C) Analisando os casos em que os dois primeiros números são iguais, vemos 164 possibilidades, que podem ser estruturadas como a seguir:

1º número	2º número	3º número	Soma
508	508	999	2015
509	509	997	2015

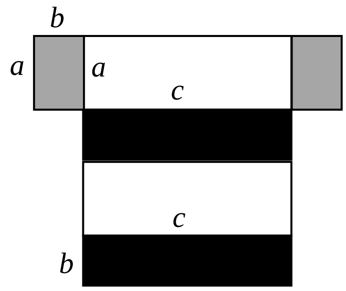
510	510	995	2015
...	...	...	...
671	671	673	2015

Agora, analisando os casos em que os dois últimos números são iguais, há 286 possibilidades, que podem ser estruturadas como a seguir:

1º número	2º número	3º número	Soma
101	957	957	2015
103	956	956	2015
105	955	955	2015
...	...	...	...
671	672	672	2015

Portanto há $164 + 286 = 450$ maneiras em os números apareceriam duas vezes como parcela.

17) (D) Sejam a, b, e c as dimensões da caixa de papelão, conforme a figura a seguir. Assim, o volume da caixa é $a \cdot b \cdot c$.



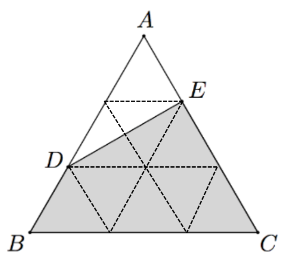
Como cada face branca tem área 35 cm^2, temos $a \cdot c = 35$. Cada face preta tem área 21 cm^2, ou seja, $b \cdot c = 35$. E cada face cinzenta tem área 15 cm^2, ou seja, $a \cdot b = 15$. Assim temos:

$$(a \cdot c)(b \cdot c)(a \cdot b) = 35 \cdot 21 \cdot 15 \Leftrightarrow$$
$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \Leftrightarrow$$
$$(a \cdot b \cdot c)^2 = (3 \cdot 5 \cdot 7)^2 \Rightarrow$$
$$a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Temos, portanto, que o volume da caixa é 105 cm^3.

18) (A) O 72 cumpre as condições, uma vez que $2 \times 72 = 144 = 12^2$, um quadrado perfeito, e $3 \times 72 = 216 = 6^3$, um cubo perfeito.

19) (A) O triângulo equilátero ABC pode ser dividido em 9 triângulos equiláteros, todos iguais, como mostra a figura.



Perceba que a área sombreada ocupa 7 dos 9 triângulos equiláteros, ou seja, a sua área é $\frac{7}{9}$ da área do triângulo ABC. Portanto a área do quadrilátero sombreado é $\frac{7}{9} \cdot 162 = 126$ cm^2.

20) (E) João não terá escolha na urna vermelha se as bolas deixadas restantes forem os números primos entre 10 e 20, que são o 11, o 13, o 17 e o 19. Isso porque os seus divisores serão o 1 (que já terá sido retirada na primeira jogada de João) e o próprio número (que será a bola retirada por Maria). Ou seja, podemos passar, no máximo, 16 + 1 = 17 bolas para a urna verde, que pode ser obtida assim:

- Maria passa a bola 15 para a urna verde;
- João passa então as bolas 1, 3 e 5 para a urna verde;
- Maria passa agora a 10;
- João vê que os divisores de 10, menores do que 10, são o 1, o 2 e o 5. Como o 1 e o 5 já foram para a urna verde, só resta a ele passar o 2;
- Maria passa então o 20;
- João tem apenas uma escolha para passar, que é o 4;
- Maria passa o 18;
- João só tem a opção de passar o 9;
- Maria passa o 12;
- João só tem o 6 para passar;
- Maria passa agora o 16;
- João tem apenas o 8 para passar;
- Maria passa o 14;
- João ainda tem uma opção, que é o 7;
- Maria vê que na urna restaram apenas o 11, o 13, o 17 e o 19. Qualquer um deles que ela passe para a urna verde deixará João sem opção, encerrando o processo. Ou seja, restarão 3 bolas na urna vermelha e 17 foram transferidas para a urna verde.