XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2
8º ou 9º ano

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – MG – PA – RS – SC

16 de junho de 2012

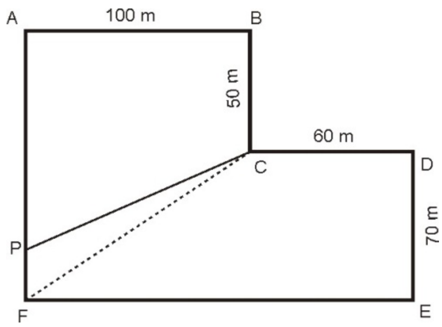
A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros ou ainda o uso do telefone celular.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) Na fase final da OBM, participaram 600 alunos de todo o Brasil. Seguindo a tradição das olimpíadas internacionais, na premiação são distribuidas medalhas de ouro, prata e bronze na proporção 1:2:3, respectivamente. Sabe-se que 60% do total de estudantes ganhou alguma das 3 medalhas. Quantos alunos ganharam medalha de prata?
A) 60 **B)**120 **C)**180 **D)** 240 **E)** 300

2) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.
A) Seis **B)** Cinco **C)** Quatro **D)** Três **E)** Duas

3) Um número é chamado de bacana se ele é um número inteiro ou é a metade de um número inteiro. Por exemplo, 3,5 e 7 são bacanas. Quantos números bacanas existem entre $2{,}1$ e $33{,}3$?
A) 61 **B)** 62 **C)** 60 **D)** 66 **E)** 31

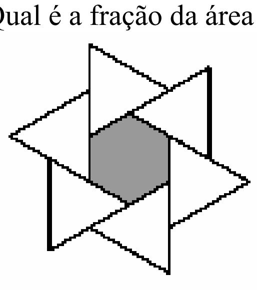
4) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

5) Na expressão $\dfrac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?
A) 38 **B)** 96 **C)** 108 **D)** 576 **E)** 648

6) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada?



A) $\dfrac{1}{8}$ **B)** $\dfrac{1}{7}$ **C)** $\dfrac{1}{6}$ **D)** $\dfrac{1}{5}$ **E)** $\dfrac{1}{4}$

7) Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de xy.

A) 4 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 0 **E)** –1

8) Para homenagear a Copa do Mundo e as Olimpíadas no Brasil, Esmeralda, a prefeita da cidade Gugulândia, decidiu que seria feriado em sua cidade no dia x do mês de número y, onde x é o último algarismo do número 2016^{2014} e y é o resto de 2014^{2016} na divisão por 11. Assim, esse feriado será no dia:

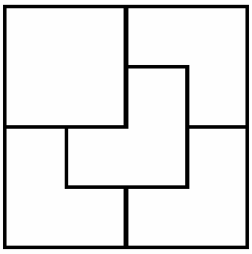
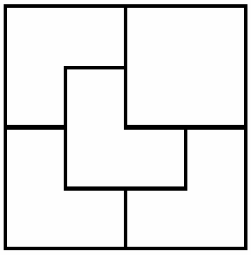
A) 8 de março
B) 6 de janeiro
C) 4 de janeiro
D) 6 de abril
E) 6 de março

Observação: O mês de janeiro corresponde ao mês de número 1 e assim por diante.

9) Fernando escreveu uma sequência de números 123456123456123456... Quantas vezes no mínimo ele deve repetir o 123456 de modo que o número se torne múltiplo de 77?

A) 7 **B)** 11 **C)** 18 **D)** 49 **E)** 77

10) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4 × 4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

11) Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número?

A) 1875 **B)** 405 **C)** 390 **D)** 330 **E)** 105

12) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** infinitos

13) As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90kg, 92kg, 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg e 101kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

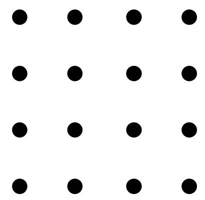
A) 52kg **B)** 51kg **C)** 49kg **D)** 48kg **E)** 46kg

14) O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro.

Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x, em metros?

A) 3 **B)** 3,5 **C)** 4 **D)** 4,5 **E)** 5

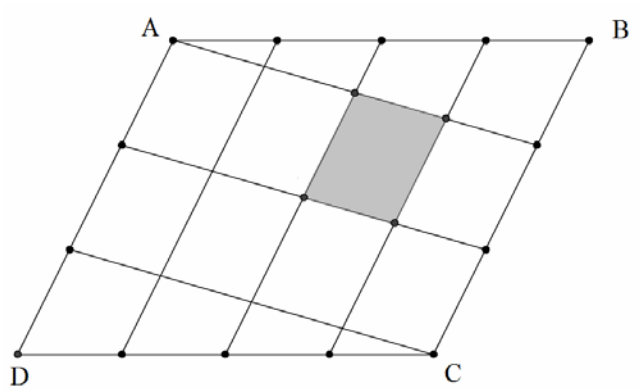
15) Quantas são as possíveis distâncias entre dois pontos distintos do reticulado 4×4 a seguir? Os pontinhos estão distribuidos em linhas e colunas igualmente espaçadas entre si por uma unidade.



A) 4 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 16

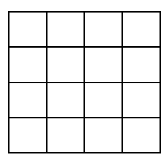
16) Esmeralda está organizando sua festa de aniversário e por um erro na distribuição dos convites, ela não sabe se a festa terá 4 ou 6 pessoas. Entretanto, ela planeja já deixar o bolo cortado em alguns pedaços não necessariamente iguais de tal forma que se vierem 4 ou 6 pessoas, cada delas receberá a mesma quantidade de bolo(o bolo inteiro deve ser distribuido em qualquer uma das duas situações). Qual o número mínimo de pedaços para ela atingir esse objetivo?
A) 24 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

17) Os lados AB e DC do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)**12

18) Renan desenhou um tabuleiro 4×4, como mostra a figura abaixo, e contou todos os quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com vértices escolhidos dentre os vértices dos quadradinhos do tabuleiro e obteve 30 quadrados.

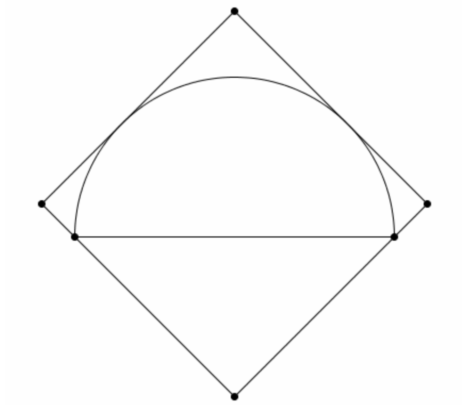


Que número Renan teria obtido se ele tivesse feito o mesmo com um tabuleiro 4×2012?
A) 30180 **B)** 30115 **C)** 20110 **D)** 15090 **E)** 8048

19) Ao calcular as raízes da equação do segundo grau $x^2 - mx + m + 5 = 0$, Samuca percebeu que elas eram os catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 5. A soma dos possíveis valores de m é:
A) 2 **B)** 12 **C)** 7 **D)** 10 **E)** 8

20) Quantos números existem entre 23456 e 65432 tais que o produto de seus algarismos é um número ímpar que não é um múltiplo de 7?
A) 128 **B)** 256 **C)** 512 **D)** 1024 **E)** 2048

21) Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?

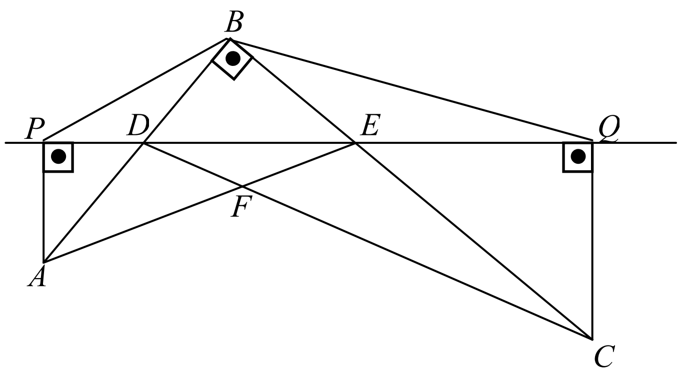


A) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **B)** $1+2\sqrt{2}$ **C)** $5+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** 4 **E)** $\frac{2}{3}+\sqrt{2}$

22) Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012}-1$?
A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 32

23) Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e mdc(2012, 34) = 2. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?
A) 12 **B)** 28 **C)** 38 **D)** 1978 **E)** 2012

24) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta *r* corta os segmentos *AB* e *BC* em *D* e *E*, respectivamente; as retas *CD* e *AE* se cortam em *F*; *P* e *Q* são as projeções ortogonais de *A* e *C* sobre a reta *r*, respectivamente.



Sendo o ângulo entre as retas *CD* e *AE* igual a $m(A\hat{F}D)=40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é
A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

25) Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1,2,3,\ldots,25\}$ que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19