XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. anos)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) B	6) D	11) B	16) C	21) A
2) E	7) E	12) B	17) D	22) D
3) B	8) B	13) D	18) C	23) D
4) B	9) E	14) D	19) C	24) C
5) C	10) D	15) C	20) C	25) B

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

1) (B) Seja o o número de estudantes que conquistaram medalha de ouro. Teremos assim:

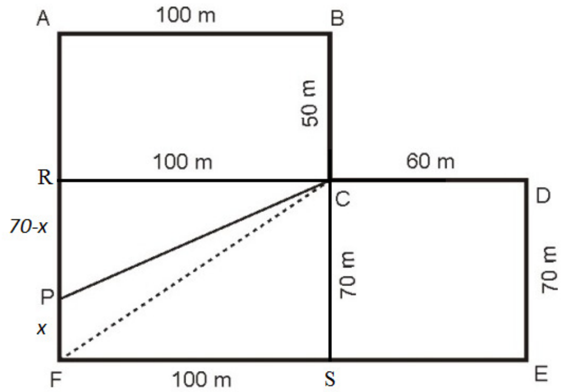
$$o + 2.o + 3.o = 60\%.600 \to 6.o = 360 \to o = 60$$

Logo o número de premiados com medalha de prata é $2.o = 120$ estudantes.

2) (E) Basta fazer uma análise item por item para notar que a resposta correta é **Duas** que possui duas vogais.

3) (B) Observe que os números bacanas são da forma $0{,}5.n$ onde n é um número inteiro. Veja ainda que o primeiro número bacana no intervalo é $2{,}5 = 0{,}5.5$ e o último é $33 = 0{,}5.66$. Então os números são: $0{,}5.5;\ 0{,}5.6; 0{,}5.7;\ \dots; 0{,}5.65; 0{,}5.66$. Logo existem: $66 - 5 + 1 = 62$ números bacanas entre $2{,}1$ e $33{,}3$

4) (B) Considere a seguinte figura:



Veja que $RC = AB = FS = 100m$, pois $ABCR$ e $ABSF$ são retângulos. De modo análogo, $RF = DE = CS = 70m$. Se tomarmos $FP = x$ a igualdade das regiões $ABCPA$ e $DEFPC$ é dada por:

$$[ABCR] + [RCP] = [DESC] + [CSFP] \to$$

$$50.100+\frac{(70-x).100}{2}=70.60+\frac{(70+x).100}{2}\rightarrow$$

$$5000-4200=\frac{((70+x)-(70-x)).100}{2}\rightarrow 800=\frac{2x.100}{2}\rightarrow$$

$$800=100.x\rightarrow x=8$$

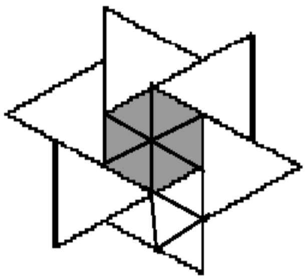
5) (C) Para fazer a análise de possíveis valores deve-se primeiro cortar os fatores comuns:

$$\frac{MxAxTxExM}{AxTxIxCxA}=\frac{MxExM}{IxCxA}=\frac{M^2xE}{IxCxA}$$

Assim, deseja-se que o numerador seja o maior possível e o denominador o mínimo possível, para isso deve-se ter $M=9$ já que este aparece duas vezes e $E=8$ que é o segundo maior valor disponível. Como I, C e A são distintos, basta tomar 1, 2 e 3 em qualquer ordem como, por exemplo, $I=1$, $C=2$ e $A=3$. Assim, temos:

$$\frac{M^2xE}{IxCxA}=\frac{9^2x8}{1x2x3}=\frac{9x3x4}{1}=108$$

6) (D) Como o hexágono é regular e cada um dos triângulos é equilátero é possível dividir toda a figura em triângulos equiláteros de lado 1, como feito no hexágono e em um dos 6 triângulos na figura a seguir:



Assim, pode-se calcular a razão entre as áreas pela razão entre a quantidade de triângulos no hexágono e quantidade total, tendo assim:

$$\frac{(triang\ no\ hex)}{(triang\ no\ hex)+6.(triang\ num\ traingulo)}=\frac{6}{6+6.4}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

7) (E) Usaremos a seguinte fatoração: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ e tem-se:

$$5(x+y)=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\rightarrow 5=(x^2-xy+y^2)=4-xy\rightarrow$$

$$xy=-1$$

8) (B) Toda potência de um número terminado em 6, termina em 6. Logo, $x = 6$. Para descobrir y iremos usar módulo 11:

$$2014^{2016} \equiv 1^{2016} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow y = 1.$$

9) (E) Observe que o número 123456 deixa resto 3 na divisão por 11 e resto 4 na divisão por 7. Como $10^6 \equiv 1 \pmod{11}$ e $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$, o número será múltiplo de 11 e 7 apenas quando o número 123456 for repetido 77 vezes.

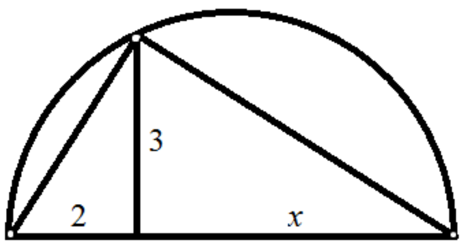
10) (D) Podemos posicionar a peça 2×2 de cinco formas diferentes. Em cada uma dessas formas, a posição das peças em formato de L estará bem determinado. Portanto, temos 5 possíveis formas de cobrir o tabuleiro.

11) (B) Os números que possuem exatamente 10 divisores positivos podem assumir apenas uma das possíveis formas: p^4q ou p^9, onde p e q representam primos distintos. O menor número ímpar da primeira forma é $3^4 5 = 405$, enquanto o segundo número é 3^9, que é bem maior do que 405. Logo, a resposta correta é 405.

12) (B) Seja n um número que possui 9 como maior divisor menor do que n. Se n possuir pelo menos dois fatores primos (não necessariamente distintos) diferentes de 3, então esse número não irá satisfazer à condição do problema. Logo, se n não for uma potência de 3, deverá assumir a forma $3^x p$. Neste caso, devemos ter $3p < 9 \Rightarrow p = 2$ e $x = 2$. Além disso, a única potência de 3 que possui a propriedade procurada é 27. Portanto, existem apenas 2 números que possuem 9 como seu segundo maior divisor.

13) (D) Sejam $a < b < c < d < e$ as massas dos cinco estudantes. Podemos perceber que $a + b = 90$ e que $d + e = 101$. Além disso, a soma das massas de todos possíveis pares representa o quádruplo da soma das massas dos estudantes. Logo, $a + b + c + d + e = 239$. Logo, $c = 48$.

14) (D) Podemos desenhar uma figura que representa a situação do problema:



Sabemos que em um triangulo o quadrado da altura relativa ao ângulo retângulo é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Portanto, $9 = 2x \Rightarrow x = \frac{9}{2}.$

15) (C) A distância entre quaisquer dois pontinhos pode ser calculada usando o Teorema de Pitágoras. O quadrado da distância entre dois pontos é um número da forma $x^2 + y^2$, onde x e y representam as distâncias entre as projeções verticais e horizontais dos pontinhos. Tanto x quanto y podem assumir valores no conjunto $\{0,1,2,3\}$. Assim, as possíveis distâncias são:

$\sqrt{0^2+1^2}, \sqrt{0^2+2^2}, \sqrt{0^2+2^2}, \sqrt{0^2+3^2}, \sqrt{1^2+1^2}, \sqrt{2^2+1^2}\ \sqrt{2^2+2^2}, \sqrt{2^2+3^2}, \sqrt{3^2+3^2}$

16) (C) Se x é o tamanho do bolo, os seguintes tamanhos de pedaços representam uma possível distribuição do bolo:

$$\left\{\frac{x}{6},\frac{x}{6},\frac{x}{6},\frac{x}{6},\frac{x}{12},\frac{x}{12},\frac{x}{12},\frac{x}{12}\right\}.$$

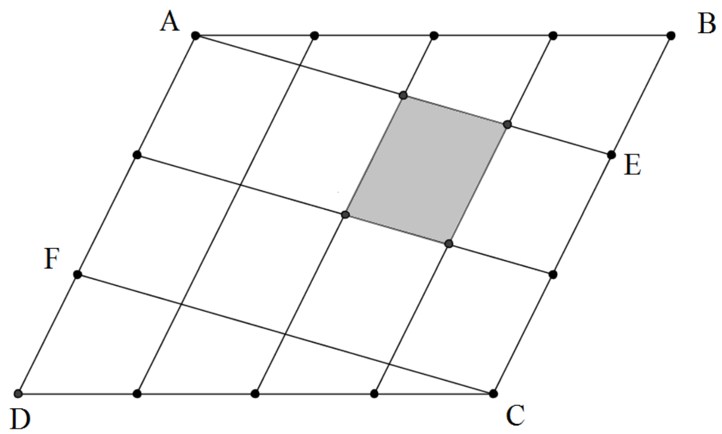
Se vierem 4 pessoas, podemos agrupar os pedaços da seguinte maneira:

$\left(\frac{x}{12},\frac{x}{12}\right),\left(\frac{x}{12},\frac{x}{12}\right),\left(\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{6}\right).$ (veja em em cada grupo temos o correspondente à fração $\frac{1}{6}$ do bolo total).

Se vierem 8 pessoas, podemos agrupar os pedaços da seguinte maneira:

$\left(\frac{x}{12},\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{12},\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{12},\frac{x}{6}\right),\left(\frac{x}{12},\frac{x}{6}\right).$ (veja que em cada grupo temos o correspondente à fração $\frac{1}{8}$ do bolo total). Nosso próximo passo será mostrar que não é possível dividirmos o bolo em menos de 8 pedaços. Suponha que isso seja possível. Pelo princípio da casa dos pombos, na festa com 6 pessoas, no máximo uma delas poderá receber mais de um pedaço e consequentemente pelo menos 5 pessoas vão receber um único pedaço de tamanho de $\frac{x}{6}$. Novamente pelo princípio da casa dos pombos, na festa com 4 pessoas, pelo menos uma receberá dois desses pedaços de tamanho $\frac{x}{6}$, isto é, receberá pelo menos $2\cdot\frac{x}{6}=\frac{x}{3}>\frac{x}{4}$. Mas isso é um absurdo pois cada pessoa nessa situação deve receber exatamente $\frac{1}{4}$ do bolo.

17) (D) Considere o paralelogramo *AECF*. Como o lado $AF=\frac{2}{3}AD$, podemos concluir que a área do *AECF* vale $\frac{2}{3}\cdot 84=56$. Como este último está dividido em 8 paralelogramos iguais, podemos concluir que a área sombreada vale $\frac{1}{8}\cdot 56=7$.



18) (C) Vamos contar os quadrados de tamanhos 1×1 ,2×2 ,3×3 e 4×4.

i) Para cada linha do tabuleiro, temos 2012 quadrados 1×1. Logo, o total de quadrados 1×1 é : 2012×4

ii) Para cada duas linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2011 quadrados 2×2. Logo, o total de quadrados 2×2 é : 2011×3.

iii) Para cada três linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2010 quadrados 3×3. Logo, o total de quadrados 3×3 é : 2010×2.

iv) Para cada quatro linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2009 quadrados 4×4. Logo, o total de quadrados 4×4 é : 2009×1.

Total: $2012\times4+2011\times3+2010\times2+2009\times1=20110$

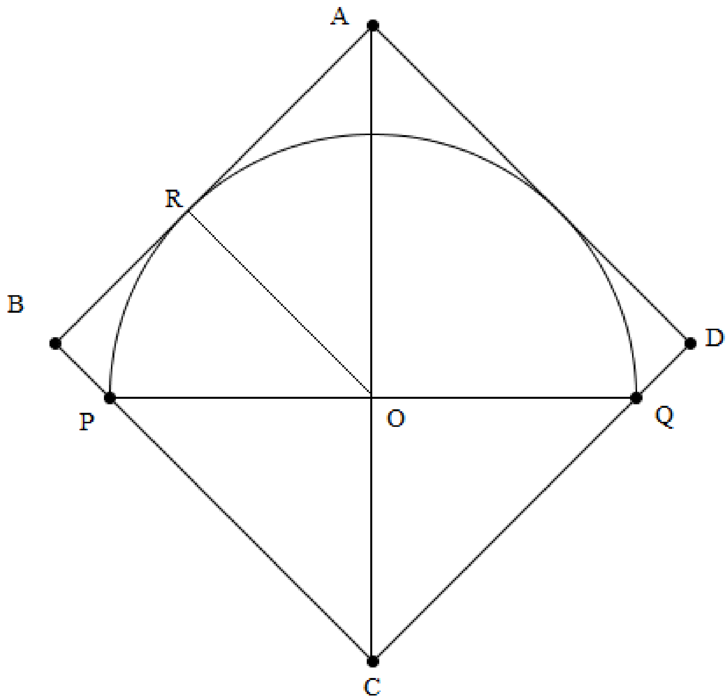
19) (C) Se a e b são as raízes da equação, pelo teorema de Pitágoras temos que $a^2+b^2=25$. Pelas relações de Girad, $a+b=m$ e $ab=m+5$. Assim,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=25+2(m+5)\Rightarrow m^2-2m-35=0\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4+140}}{2}$$

Como os catetos de um triângulo são positivos e $a+b=m$, podemos concluir que $m>0$. Portanto a única opção é $m=7$.

20) (C) Os números procurados possuem dígitos no conjunto {1,3,5,9}. Entre 23456 e 65432, não existem números começados por 1 e 9. Assim, temos apenas duas opções para escolher o primeiro dígito mais à esquerda. Para cada um dos demais dígitos dos números procurados, temos 4 opções. Assim, pelo princípio multiplicativo, o total de números é: $2\times4\times4\times4\times4=2^9=512$

21) (A)



Seja O o centro da semicircunferência descrita no enunciado, P e Q os pontos como na figura e R o ponto de tangência da semicircunferência com o lado AB. Temos que $OR = 1$ e $OR \perp AB$. Como O está na diagonal AC, temos que $O\hat{A}B = 45°$. Assim, $OA = OR\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Além disso, OC é altura e mediana relativa à hipotenusa no triângulo retângulo PQC, cuja hipotenusa é 2. Assim, OC = 1. Portanto, a diagonal do quadrado vale $1+\sqrt{2}$ e daí sua área é $\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

22) (D) Temos que

$2011^{2012}-1=(2011^{1006}-1)(2011^{1006}+1)=(2011^{503}+1)(2011^{503}-1)(2011^{1006}+1)$. Temos que $2011 \equiv -1 (\text{mód } 4)$. Assim, $2011^{503}-1 \equiv (-1)^{503}-1 \equiv 2 (\text{mód } 4)$. Assim, a maior potência de 2 que divide $2011^{503}-1$ é 2. Também temos que $2011^{1006}+1 \equiv (-1)^{2006}+1 \equiv 2 (\text{mód } 4)$. Daí, a maior potência de 2 que divide $2011^{1006}+1$ também é 2. Finalmente, $2011 \equiv 3 (\text{mód } 8)$, o que nos dá que $2011^{503}+1 \equiv 3^{503}+1 \equiv 4 (\text{mód } 8)$, donde a maior potência de 2 que divide $(2011^{503}+1)(2011^{503}-1)(2011^{1006}+1)$ é $2\cdot 2\cdot 4 = 16$.

23) (D) Note que se estivermos na edição de número x da OBM, estaremos no ano de $1978+x$. Assim, estamos interessados no maior valor possível de $\text{mdc}(x, 1978+x)$. Pelo Algoritmo de Euclides, $\text{mdc}(x, 1978+x) = \text{mdc}(x, 1978)$. O maior valor possível para esse mdc é 1978, que pode ser atingido tomando x = 1978.

24) (C) Como $A\hat{P}E = A\hat{B}E = 90°$, o quadrilátero *APBE* é inscritível. Da mesma maneira, o quadrilátero *DBQC* é inscritível. Assim, temos que $P\hat{B}A = P\hat{E}A$ e que $Q\hat{B}C = Q\hat{D}C$. Daí, $P\hat{B}Q = P\hat{B}A + 90° + Q\hat{B}C = P\hat{E}A + 90° + Q\hat{D}C$. Mas no triângulo *DEF*, temos pelo teorema do ângulo externo que $40° = A\hat{F}D = P\hat{E}A + Q\hat{D}C$. Assim, $P\hat{B}Q = 90° + 40° = 130°$.

25) (B) Considere os conjuntos $\{1,4,9,16,25\}$, $\{2,8,18\}$, $\{3,12\}$, $\{5,20\}$ e $\{6,24\}$. Diremos que um subconjunto satisfazendo as propriedades do enunciado é *supimpa.* Para que um subconjunto seja *supimpa*, ele só pode possuir no máximo um elemento de cada um dos conjuntos listados. Assim, um subconjunto *supimpa* possui no máximo $25-4-2-1-1-1=16$ elementos. Um exemplo de um subconjunto *supimpa* com 16 elementos é $\{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23\}$. Portanto, o número máximo de elementos de um subconjunto *supimpa* é de fato 16.