35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

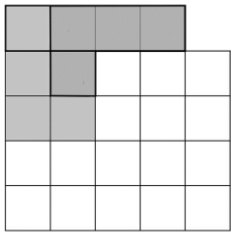
1) D)	6) D)	11) E)	16) B)	21) Anulada
2) A)	7) D)	12) C)	17) C)	22) B)
3) D)	8) E)	13) D)	18) C)	23) A)
4) A)	9) A)	14) D)	19) A)	24) A)
5) E)	10) A)	15) E)	20) A)	25) C)

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**
- **Na questão anulada todos os alunos devem receber 1 ponto.**

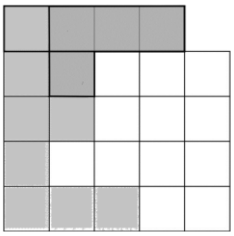
1) (D) Precisamos comparar os valores pagos em ambas as situações:
Hoje: $2000 \times 95\% = 1900$
Amanhã: $(2000 \times 105\%) \times 95\% = 1995$
Assim, pagando amanhã, teremos um valor maior em 95 reais.

2) (A) Vejamos que podemos completar o 1º desnível vertical usando 2 peças $1x1x2$ em pé e, assim, fazer com que o bloco tenha uma altura mínima três. Depois, podemos usar mais 6 peças $1x1x2$ em pé para completar o 2º desnível vertical e, assim, fazer com o que o bloco tenha uma altura mínima cinco. Por último, podemos usar 4 peças $1x1x2$ na horizontal para completar o bloco retangular.

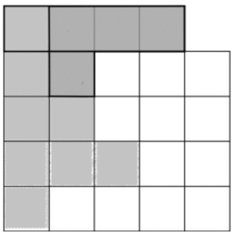
3) (D) Notemos que só há um jeito de preencher o quadrado do esquerdo e alto, conforme mostrado na figura ao lado.



Para preencher o próximo, observando o lado esquerdo, há duas opções conforme mostrado abaixo:

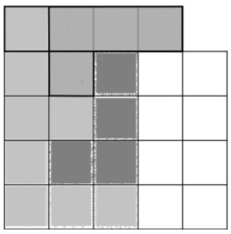


(caso 1)

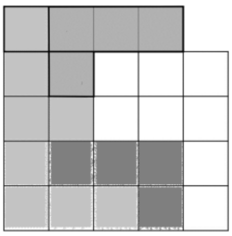


(caso 2)

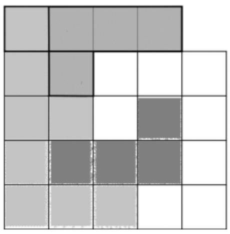
Vejamos que o caso 1 pode ser dividido em outros três sub-casos:



(caso 1.1)



(caso 1.2)



(caso 1.3)

Os casos 1.1, 1.2 e 1.3 possuem exatamente 2, 1 e 1 formas de completamento, respectivamente. Já o caso 2 possui uma forma de completar. Portanto, somando tudo, temos 5 formas de completar o tabuleiro com tais peças.

4) (A) Convertendo os lados o quadrado pela escala dada, concluímos que as dimensões reais do dormitório são $10 \times 45cm$ e $6 \times 45cm$. Multiplicando ambos valores obtemos $12{,}15\ m^2$.

5) (E) O perímetro total do pentágono é 12. Assim, a cada 12 segundos a formiguinha volta para o vértice *A*. Como 2004 é múltiplo de 12, basta analisarmos onde ela estará 9 segundos após sair do vértice A. Como $AB + BC + CD + DE = 9$, ela estará no vértice *E*.

6) (D) A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual à 9 + 9 = 18. Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

7) (D) Como 1001 é múltiplo de 7, $925925 = 1001 \cdot 925$ também é. Em geral, qualquer numero de seis algarismos onde os três primeiros formam um número igual aos três últimos é um múltiplo de 7. Usando esse fato é fácil verificar que nenhuma outra das opções contém um múltiplo de 7.

8) (E) A primeira condição nos diz que $n \geq 55$ e a segunda que $n \leq 59$. Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando $n = 56{,}57{,}58$ ou 59

9) (A) Façamos 3 casos e analisemos, entre os porteiros, quem falou a verdade e quem mentiu.

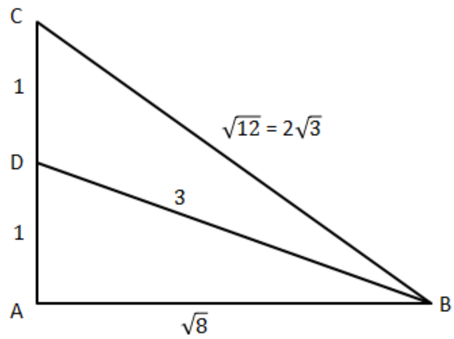
- Caso 1: Porta 1 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1 e 3 falaram a verdade e o porteiro 2 mentiu. Ok!
- Caso 2: Porta 2 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1, 2 e 3 falaram a verdade. Falso, pois, pelo menos, um porteiro mentiu.
- Caso 3: Porta 3 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1, 2 e 3 mentiram. Falso, pois, pelo menos, um porteiro falou a verdade.

10) (A) Note que na linha *k* aparecem exatamente os *k* ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha *j* qualquer é o [*j*.(*j*+1)/2]-ésimo ímpar. Dessa forma, temos que os *k* ímpares da linha *k* estão compreendidos no intervalo de [(*k* – 1).*k*/2 + 1] até [*k*.(*k* + 1)/2]. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar *k* inteiro que satisfaça:

$$(k - 1).k/2 + 1 < 1007 < k.(k + 1)/2.$$

A primeira desigualdade implica que $(k-1)^2 < 2 \cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012} + 1 < 46$. A segunda desigualdade implica que $8057/4 < (k + 1/2)^2$ e consequentemente $\sqrt{8057}/2 - 1/2 < k$. O único inteiro nesse intervalo é *k* = 45.

11) (E) Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo DAB, temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo ABC, temos: $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$.



12) (C) Os amigos podem ser divididos em três grupos de que percorrem suas trajetórias em ciclos.
Cidades do ciclo 1: 1, 6, 8 e 1.
Cidades do ciclo 2: 9,4,7,11,5 e 2
Cidades do ciclo 3: 3, 10

Em cada ciclo, transcorridas uma quantidade de dias múltipla do tamanho do ciclo, todos os viajantes voltam para as suas cidades de origem e isso acontece apenas nessa ocasião. Sendo assim, o número mínimo de tempo para que todos voltem para suas cidades de origem é um o menor múltiplo comum dos tamanhos dos ciclos, ou seja, o número 6.

13) (D)

Solução 1:
Note que $32 = 8\times 4$, $33 = 8\times 3 + 9\times 1$, $34 = 8\times 3 + 10\times 1$, $35 = 8\times 2 + 9\times 1 + 10\times 1$, $36 = 8\times 2 + 10\times 2$, $37 = 8\times 1 + 9\times 1 + 10\times 2$, $38 = 8\times 1 + 10\times 3$ e $39 = 9\times 1 + 10\times 3$ são quantidades admissíveis de compras de chocolates. Como temos 8 números consecutivos, acrescentando-se múltiplos de 8 podemos comprar qualquer quantidade de chocolates maior ou igual à 32. Se 31 pudesse ser comprado, como 8 e 10 são pares, devemos usar uma quantidade ímpar de caixas com 9 chocolates. Não podemos usar três caixas pois $31 - 9\times 3 = 4$ e as outras caixas possuem mais que 4 chocolates. Se usarmos apenas uma caixa, temos que obter o número 22 apenas com caixas de 8 e 10. Como não podemos usar mais duas de qualquer uma dessas caixas, é fácil verificar que não podemos obter o 22 e consequentemente 31 é a maior quantidade de chocolates não admissível.

Solução 2:
As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma $8x + 9y + 10z$ com x, y e z inteiros não negativos. Todo número maior que $56 = (8-1)(9-1)$ pode ser escrito na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos. Um número que pode ser escrito na forma $8x + 9y$ em particular também pode ser escrito na forma $8x + 9y + 10z$. Assim, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. É fácil verificar, como na primeira solução, que todos os números de 32 até 55 podem ser escritos na forma $8x + 9y + 10z$ e que 31 não.

14) (D) Contaremos iniciamente quantos inteiros menores ou iguais a 100 que não satisfazem essa propriedade. Tal inteiro deverá ser maior ou igual à uma potência perfeita que não é um quadrado perfeito e menor que o próximo quadrado perfeito maior que esta potência. A única potência perfeita no intervalo investigado e que não é um quadrado perfeito é o número 3^3. O próximo quadrado perfeito é o número 6^2. Assim, existem $10 = 6^2 - 3^3 + 1$ números que não satisfazem a propriedade mencionada e consequementemente a resposta é o complementar: $100 - 10 = 90$.

15) (E) Se *VA* = diâmetro = 60 metros, então *HB* = raio = 30 metros. Logo, o ataque do herói levará $30/15 = 2$ segundos para chegar até o ponto *B*. Nesse tempo, o ataque do vilão percorreu $2 \cdot 10\pi = 20\pi$. Logo o arco BA mede $30\pi - 20\pi = 10\pi = 1/3 \cdot 30\pi$ e consequentemente o ângulo $\angle BHA = 60^\circ$.

16) (B) O máximo dividor comum deve dividir a diferença entre quaisquer dois desses números. Note que $123456798 - 123456789 = 9$ e assim o máximo dividor comum é no máximo 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, como $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ é dívisivel por 9, temos que 9 realmente divide todos esses números.

17) (C) Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 9 + 3 \cdot 6 = 27$, podemos concluir que $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$.

18) (C) Como *O* é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = 2\angle OEA = 35^\circ$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$

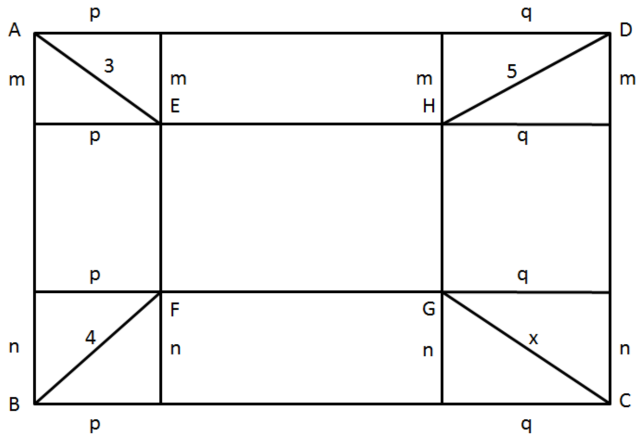
19) (A) Os primeiros 11 termos da sequência são: 0,1,2,3,0,2,0,3,2,1 e 0. Para o cálculo do resto, o efeito de somarmos quatro múltiplos de 4 é o mesmo que somarmos nenhum múltiplo de 4 e assim é como se a sequência estivesse recomeçando. Com isso podemos concluir que a sequência se repete de 11 em 11 termos. Como 2013 é múltiplo de 11, o 2013º termo da sequência é o número 0.

20) (A) Os dígitos admissíveis para os números interessantes invertidos são: 0,2,5,6,8 e 9. Como o dígito 0 não pode ocupar a posição das centenas, temos apenas 5 possibilidades de escolhas para o dígito das centenas e das unidades. Para o dígito das dezenas, temos 6. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ números interessantes invertidos.

21) (D) Anulada

Os dígitos admissíveis para os números interessantes espelhados são: 0,2,3,5 e 8. Como o dígito 0 não pode ocupar a posição das centenas, temos apenas 4 possibilidades de escolhas para cada um dos dígitos das centenas. Para o dígito das dezenas, temos 5 e para o dígito das unidades temos 5, já que nessas posições o 0 pode aparecer. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos 4.5.5 = 100 números interessantes invertidos.
Nenhum dos itens tem esse valor, logo a questão foi anulada. **Todos os estudantes devem receber o ponto.**

22) (B) Tracemos perpendiculares dos pontos *E*, *F*, *G* e *H* para os lados do retângulo *ABCD* e chamemos tais segmentos de *m*, *p*, *n* e *r*, conforme mostrado na figura ao lado. Aplicando teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos formados pelos lados *AE*, *BF*, *CG* e *DH*, temos que:



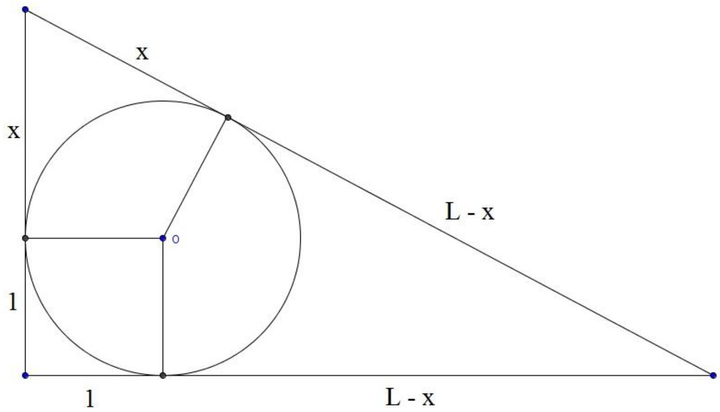
- Lado *AE*: $m^2 + p^2 = 3^2$ (I)
- Lado *BF*: $p^2 + n^2 = 4^2$ (II)
- Lado *CG*: $n^2 + q^2 = x^2$ (III)
- Lado *DH*: $q^2 + m^2 = 5^2$ (IV)

Daí, temos que:

- (I) + (III): $m^2 + p^2 + n^2 + q^2 = 3^2 + x^2$ (V)
- (II) + (IV): $p^2 + n^2 + q^2 + m^2 = 4^2 + 5^2$ (VI)
- (V) e (VI): $3^2 + x^2 = 4^2 + 5^2$, o que implica em $x^2 = 25 + 16 – 9$, ou seja $x^2 = 32$

23) (A) Temos quatro opções para o número formado pelos dois últimos algarismos dos números escritos em que a soma dos dois últimos é maior que a dos dois primeiros algarismos: 41, 14, 24 ou 42. Para cada uma dessas opções, temos duas maneiras e posicionarmos os outros dois algarismos dentre os dígitos que faltam. Logo, existem $2 \cdot 4 = 8$ tais números

24) (A)



Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $(x + 1)^2 + (L – x + 1)^2 = L^2$

Daí, $L = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Para encontrarmos o menor de L, devemos estudar o menor valor que a função $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ pode assumir. Perceba que:

$$L = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x^2-1+2}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1} = x-1+\frac{2}{x-1}+2 \quad (I)$$

Por $MA \geq MG$, temos:

$$\frac{x-1+\frac{2}{x-1}}{2} \geq \sqrt{(x-1).\frac{2}{(x-1)}} = \sqrt{2} \Rightarrow x-1+\frac{2}{x-1} \geq 2.\sqrt{2} \quad (II)$$

Por (I) e (II), temos: $L \geq 2.\sqrt{2}+2$.

Obs.: Note que o menor L acontece, quando há a igualdade em $MA \geq MG$, ou seja, quando: $x-1=\frac{2}{x-1} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$. Como $x > 0$, devemos ter $x=1+\sqrt{2}$.

25) (C) Como $3^2 < 10$, temos $3^{400} = (3^2)^{200} < 10^{200}$. Além disso, como $3^4 = 81 > 2^3 \cdot 10$, também temos $3^{400} = (3^4)^{100} > (2^3 \cdot 10)^{100} = 2^{300} \cdot 10^{100}$. Note que $2^4 = 16 > 10$, e assim $3^{400} = 2^{300} \cdot 10^{100} = (2^4)^{75} \cdot 10^{100} > 10^{175}$. Daí, podemos concluir que 3^{400} possui entre 175 e 200 dígitos.