36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) C	6) C	11) D	16) B	21) C
2) E	7) A	12) A	17) B	22) Anulada
3) A	8) E	13) B	18) E	23) A
4) A	9) C	14) A	19) A	24) B
5) A	10) B	15) D	20) A	25) E

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**
- **Na questão anulada todos os alunos devem receber 1 ponto.**

1) (C) A diferença entre dois números é ímpar apenas quando um deles é par e o outro é ímpar. O único número primo par é o número 2. Daí, se p e q são números primos diferindo por 7, um deles deve ser 2 e o outro deve ser 9. Chegamos em um absurdo pois 9 não é primo. Todos os números dos outros itens podem ser realizados como diferença de primos: $4=7-3, 6=11-5, 8=11-3$ e $9=11-2$

2) (E) Como 2010 é múltiplo de 6, cada uma das três cores está equidistribuída tanto entre os números pares quanto entre os números ímpares dos 2010 primeiros números. Vejamos as cores dos próximos quatro números:

2011(Amarela), 2012(Verde), 2013(Preta) e 2014(Amarela)

O elemento 2013 faz os ímpares pretos terem uma unidade a mais do que os verdes ímpares.

3) (A) Os três em conjunto pintam $2+3+5=10$ metros em 10 minutos. Daí, eles vão precisar de $18\cdot 10=180$ minutos para pintar os 180 metros correspondentes aos três muros.

4) (A) Três palavras possuem quatro letras e duas possuem mais que quatro. Consequentemente, no máximo duas palavras possuem mais letras que a palavra da opção correta. Além disso, como todos os números são maiores ou iguais à “duas” unidades, a opção correta é a palavra “duas”.

5) (A) Veja questão 5 da prova do nível 1.

6) (C) Como $2014=53\cdot 19\cdot 2$, o número procurado deve ter a fatoração $p^{52}q^{18}r^{1}$. Para minimizar o número, devemos associar os menores fatores primos aos maiores expoentes obtendo $2^{52}3^{18}5^{1}$.

7) (A) Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagem o é. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, resultando em nenhuma ou duas mensagens falsas.

8) (E) Sejam k a quantidade de sobrinhos e x a quantidade que cada um receberia na primeira divisão. Então: $kx + 10 = 250$ e $k(x-1) + 22 = 250$. Subtraindo uma equação da outra obtemos $x = 12$.

9) (C) Uma maneira de fazer aparecer 100 com 6 apertadas é fazer: $0 + 4 \times 5 \times 5$. Como a calculadora começa com 0, após as duas primeiras apertadas, teremos um número menor ou igual a 9. Com mais duas apertadas, o número resultante será menor ou igual a $9 \times 9 = 81$. Como não podemos apertar dois dígitos sem apertar uma operação, a quinta apertada será uma operação e não produzirá nenhum número maior que 81. Logo, o mínimo é 6.

10) (B) A seguinte sequência de visitas possui custo total 5:

$$A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} D.$$

Veja que o custo de viajarmos entre cada cidade é pelo menos 1. Suponha que existe um caminho mais barato do que o apresentado. Assim, o custo de cada viagem deve ser exatamente 1 e não podemos repetir cidades em nossa trajetória. Como os custos saindo de *D* são pelo menos 2, *D* deve ser a cidade de chegada. A única maneira de chegar em *D* pagando 1 é vindo através de *B*. Veja finalmente que não é possível chegar em *B* pagando menos que 2.

11) (D) Veja questão 11 da prova do nível 1.
12) (A) Veja o problema 20 da prova do nível 1.

13) (B) Incialmente, o calendário *gregoriano* impôs uma vantagem de 10 dias em relação ao calendário *juliano*. Além disso, de lá para cá, para cada um dos anos múltiplos de 100 que não são de 400, a saber: 1700, 1800 e 1900; o calendário gregoriano ganhou mais um dia de vantagem totalizando assim 13 dias. Como o mês de maio possui 31 dias nos dois calendários, hoje seria o dia 21 de maio de 2014.

14) (A) Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é $z = 4$. Pelo critério de divisibilidade por 11, $(x + 2 + z) - (y + 6) = x - y$ deve ser divisível por 11. Como *x* e *y* são dígitos, a única opção é $x = y$. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, $(x + y + 2 + 6 + z) = 2x + 12$ deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é $x = 3$.

15) (D) Dada uma escolha qualquer de três números no conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$, o triminó simplificado formado por eles é único. Existem $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ escolhas de três números distintos em tal conjunto. Para contarmos quantas escolha possuem exatamente dois números repetidos, basta escolhermos dois números e, em seguida, escolhermos um deles para repetirmos. Podemos fazer isso de $2\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=30$ formas. Claramente existem exatamente 6 triminós com os três números iguais. Portanto, o número procurado é:

$$20+30+6=56$$

16) (B) A razão entre a distância percorrida por um atalho de α° e o caminho normal de raio *R* é

$$\frac{2\pi R\alpha/360^\circ}{2R}=\frac{\pi\alpha}{360^\circ}$$

Assim, só é vantajoso usar o atalho quando tal quociente for menor do que 1. Isto ocorre no atalho 2 e não ocorre no atalho 1.

17) (B) Como todo o trapézio inscritível é isósceles e os triângulos mencionados também o são, temos as igualdades entre os arcos determinados pelas seguintes cordas:

$$AB=AC=BD=CE=DF=EG=FH=IG=IH$$

Esses 9 arcos iguais determinam a medida de $\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$. Portando, o ângulo x mede $\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$.

18) (E) Sejam p e q as raízes da segunda equação. Usando as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do segundo grau:

$$p+q=b,\ pq=a,\ p^2+q^2=a,\ p^2q^2=b$$

Daí, $3a=a+2a=(p^2+q^2)+2pq=(p+q)^2=b^2$ e $a^2=p^2q^2=b$, ou seja, $3a=b^2=(a^2)^2=a^4$. Como a é não nulo, devemos ter $a=\sqrt[3]{3}$.

19) (A) Considere as estimativas:

$$\begin{aligned}2014^5 &> 2000^5=32\cdot 10^{15}\\ 3015^4 &< 4000^4=64\cdot 10^{12}\\ 4016^3 &< 5000^3=125\cdot 10^{9}\\ 5017^2 &< 6000^2=36\cdot 10^{6}\\ 6018^1 &< 7000=7\cdot 10^{3}\end{aligned}$$

O último número escrito na primeira linha possui mais dígitos que todos os outros escritos nas linhas subsequentes. Dessa forma, 2014^5 é o maior.

20) (A) Como *P* está na bissetriz, ele possui igual distância *r* aos lados *AB* e *AC*. Assim,

$$\frac{6}{5}=\frac{6r/2}{5r/2}=\frac{S(ABP)}{S(APC)}=\frac{3/2}{S(APC)}\Rightarrow S(APC)=\frac{5}{4}$$

21) (C) Como o ângulo $\angle EBF$ mede $360^\circ-90^\circ-60^\circ-60^\circ=150^\circ$ e os triângulos EBF e EAH são isósceles de mesmo ângulo central. Segue que $\angle HEF=\angle HEA+\angle AEB+\angle BEF=15^\circ+15^\circ+60^\circ=90^\circ$. Além disso, por simetria, temos o mesmo resultado para os outros ângulos do quadrilátero $EFGH$ e vale que $EF=FG=GH=HE$. Consequentemente $EFGH$ é um quadrado e sua área vale:

$$EF^2=EB^2+BF^2-2EB\cdot BF\cos 150^\circ=2+\sqrt{3}$$

22) (Anulada) Como $2014=53\cdot 19\cdot 2$ segue que a^2+b^2 é um de seus 8 divisores. Os possíveis restos de um quadrado perfeito na divisão por 19 são: $0,1,4,5,6,7,9,11,16$. A única soma de dois deles que produz um múltiplo de 19 é a soma $0+0$. Assim, se a^2+b^2 é múltiplo de 19, ae b também o são. Dado que 2014 não possui dois fatores de tal primo, podemos concluir que a^2+b^2 deve ser um divisor de $53\cdot 2$. As possibilidades são:

$$a^2+b^2=2\Rightarrow(a,b)=(1,1);$$
$$a^2+b^2=53\Rightarrow(a,b)=(7,2);(2,7);$$
$$a^2+b^2=106\Rightarrow(a,b)=(9,5);(5,9).$$

Portanto, existem 5 pares de soluções. Como nenhum dos itens apresenta o número 5, a questão será anulada.

23) (A) Dado:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{a^2}{b}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$$

Segue que $\sqrt{x}=\frac{b^2+a^2}{2b}$ e $\sqrt{y}=\frac{b^2-a^2}{2b}$. Consequentemente $\sqrt{xy}=\frac{b^4-a^4}{4b^2}$.

24) (B) Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna. O total de preenchimentos é:

$$4\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3=4\cdot 3^{2013}$$

25) (E) Podemos observar que, por exemplo, $(1098, 1203)$ e $(8796, 8901)$ são pares de números de formados por 4 algarismos distintos entre os quais não existem números que satisfazem as condições dadas, ou seja, o valor pedido é, pelo menos, 105. Logo

basta verificar que essa é a maios distância possível entre números de quatro algarismos distintos.
A chave para obter os exemplos acima foi considerar números com algarismos do milhar e da centena consecutivos. De fato, vamos verificar que se $abcd$ é um número que satisfaz as condições do problema com $|a-b| \geq 2$, então o seu sucessor é menor do que $abcd + 105$. Inicialmente, temos que, fixado milhar e centena, nos conjuntos $\{6,7,8,9\}$ e $\{0,1,2,3\}$ sempre podemos tomar dois algarismos para dezena e unidade. Assim, podemos concluir que caso isso não ocorresse o próximo número com quatro algarismos consecutivos teria a forma $a(b+1)ef$ com $ab76 \leq abcd < a(b+1)ef \leq a(b+1)03$. Ou seja, a diferença é menor ou igual a 27, uma contradição. Portanto basta agora considerar os casos em que milhar e centena são consecutivos. Vamos eliminar primeiro o caso em que o milhar é o menor algarismo.
Sendo, $1 \leq a \leq 7, a(a+1)cd$ e $a(a+2)ef$ um par que satisfaz as condições do problema, teríamos $a(a+1)76 \leq a(a+1)cd < a(a+2)ef \leq a(a+2)0(a+1)$ e a diferença não pode ser maior do que 32. Para $a=8$, os números são 8976 e 9012 e a diferença é 36. Finalmente, falta analisar o caso em que o milhar é o maior. Sendo, $1 \leq a \leq 7, (a+1)acd$ e $(a+1)(a+2)ef$ um par que satisfaz as condições do problema, teríamos $(a+1)a96 \leq (a+1)acd < (a+1)(a+2)ef = (a+1)(a+2)01$ e, de fato, atingimos a diferença 105 apenas no caso $a=7$: par $(8796, 8901)$. O caso $a=0$, fornece o outro par $(1098, 1203)$.