37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) C	6) C	11) A	16) D	21) D
2) B	7) A	12) B	17) A	22) E
3) B	8) C	13) D	18) C	23) C
4) E	9) A	14) E	19) B	24) C
5) B	10) E	15) B	20) D	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**
-

1) (C) A última informação diz que a ordem de chegada entre os três carros que não são da cor branca é M – A – V. Como o carro branco chegou antes do marrom, na ordem anterior, ele deve ser inserido no início. Portanto a ordem correta é B – M – A - V

2) (B) O nosso século se iniciou no ano 2001 e terminará no ano 2100. Como a média aritmética dos algarismos de 2100 não é 2, os números procurados serão da forma $\overline{20ab}$. Veja que $\frac{2+0+a+b}{4} = 2 \leftrightarrow a + b = 6$. Dado que a e b são algarismos, a princípio, os possíveis valores do par (a, b) são $(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$ e $(6,0)$. Como só nos interessam os anos posteriores a 2015, devemos descartar os primeiros dois pares. Portanto existem cinco anos possíveis.

3) (B) O ângulo interno de um dodecágono regular é $\frac{180^\circ(12-2)}{12} = 150^\circ$. Considerando o circuncírculo do dodecágono, podemos concluir que seu interior foi decomposto em quatro trapézios congruentes e um quadrado. Se x é o ângulo procurado, o ângulo interno ao vértice A possui medida $2x + 90^\circ = 150^\circ$. Portanto, $x = 30^\circ$.

4) (E) Como um intervalo de 7 dias consecutivos possui exatamente um domingo, o dia das mães sempre deve ocorrer após o dia 07 de maio. Como em algum ano o aniversário de Marta também foi dia das mães, a única opção possível é a letra E.

5) (B) Inicialmente note que dadas quaisquer três faces retangulares, sempre existem duas delas com uma aresta em comum. Como consequência disso, para pintarmos as faces retangulares, precisaremos de pelo menos três cores, pois se usarmos apenas duas existirão pelo menos três faces de uma mesma cor. Como as faces pentagonais não podem repetir as cores das faces retangulares, precisaremos de pelo menos mais uma cor. Um exemplo de tal coloração é pintar ambas as faces pentagonais de cinza, e as retangulares de branco, verde, azul, branco e verde, nessa ordem.

6) (C) Usando a diferença de quadrados, a equação pode ser reescrita como $[(x-a)-b][(x-a)+b] = 0$. Assim, ou $x - a - b = 0$ ou $x - a + b = 0$ e o conjunto solução é $\{a + b, a - b\}$.

7) (A) Inicialmente calculemos, em relação ao percentual total de eleitores, como se dividiram os votos daqueles que votaram em CC no primeiro turno. Como $40\% \times 20\% = 8\%$, segue que no segundo turno o partido AA recebeu um incremento oriundo dos eleitores do partido CC de 8%, enquanto que o partido BB recebeu um incremento de $20\% - 8\% = 12\%$. Com relação a mudança de votos dos que haviam votado em outros partidos ou anulado, temos $60\% \times 10\% = 6\%$ ainda não votando em AA e BB e os outros $10\% - 6\% = 4\%$ mudando para AA ou BB. Assim, AA recebeu mais que $39\% + 8\% = 47\%$. Além disso, BB obteve menos que $100\% - 47\% - 6\% = 47\%$. Isso nos permite concluir que AA ganhou com mais de 47%.

8) (C) Calculando dos quadrados das quantidades de vogais e consoantes de cada item, obtemos os números: 50,74,85,72 e 113, respectivamente. O único que coincide com o número expresso pela sentença do item associado é o 85. Portanto, a resposta está na letra C.

9) (A) Como as retas AB e CD são paralelas, temos $\Delta CDG \sim \Delta GAE$ e, consequentemente, $\frac{CG}{GA} = \frac{DG}{GE} = \frac{1}{2}$. Daí $\frac{CG}{CG+GA} = \frac{CG}{12} = \frac{1}{3}$ e $CG = 4$.

10) (E) Seja x o ano procurado. Para que 2015 e x coincidam, a diferença entre a quantidade de dias antes do primeiro dia de x e desde o primeiro dia de 2015 deve ser um múltiplo de 7 e x não pode ser bissexto. Dado que 365 deixa resto 1 na divisão por 7, devemos analisar o resto da soma dos dias decorridos após cada um dos anos a partir de 2015:

Ano	Resto da Soma	Ano	Resto da Soma
2015	1	2021	2
2016	3	2022	3
2017	4	2023	5
2018	5	2024	6
2019	6	2025	0
2020	1	2026	

Consequentemente, como 2026 não é bissexto, podemos concluir que ele é o ano procurado.

11) (A) Seja x o número procurado**.** Então $2x = n^2$ e $3x = m^3$. Como n^2 possui pelo menos dois fatores 2, x é par. Consequentemente a fatoração em primos de m^3 deve conter pelo menos três fatores 2 e isso obriga x a ser múltiplo de 8. Usando agora que m^3 é múltiplo de 3 e, portanto, deve possuir pelo menos três fatores de tal primo em sua fatoração, podemos concluir que x é múltiplo de 9. Assim, x é múltiplo de 72. Como tal número satisfaz as duas condições do enunciado, ele é o menor valor interior positivo possível para x.

12) (B) Como números escritos em quadrados vizinhos devem possuir paridades distintas, pois a soma deles é ímpar, o tabuleiro pode ser sinalizado com dois símbolos indicando números com mesma paridade:

B	A	B
A	B	A
B	A	B

Dentre os números de 1 a 9, existem 5 ímpares e 4 pares. Portanto, os números nas casas B são ímpares e a soma máxima nas casas cinzas é 9+7+5+8=29. Para garantirmos que 29 é possível, basta exibirmos um exemplo, como feito abaixo. Portanto a soma dos números escritos nos quadrados brancos é 1+2+3+4+6=16.

1	2	7
8	9	4
3	6	5

13) (D) Após as últimas transferências, Carlos deve ter pago ao todo *R$32,00*. Portanto, o valor das entradas do cinema foi 32+8+14=54 e cada uma delas custou *R$18,00*.

14) (E) Seja x a quantidade máxima de peças. Como ela não quer peças quadradas, cada uma delas deve possuir pelo menos 2 metros quadrados de área. Daí $2x \leq 49$. Como x, é um número inteiro, podemos concluir que $x \leq 24$. Para mostrar que esse é o máximo, basta exibirmos um exemplo. Cubra uma lateral 1x7 do quadrado com uma peça 1x3 e duas peças 1x2. O restante de área que precisa receber peças é um tabuleiro 6x7 que pode ser coberto com 21 peças 2x1, todas na mesma direção.

15) (B) É possível empilhar 51 cubinhos. Para isso, basta usar 26 cubos verdes intercalados por 25 cubos das outras duas cores. Se fosse possível empilhar 52 cubinhos, seriam usados pelo menos $52 - 10 - 15 = 27$ cubos verdes. Entretanto, como dois cubos verdes não podem estar em contato, precisaríamos de pelo menos 26 cubos de outras cores separando-os. Como não existe tal quantidade de cubinhos diferentes da cor verde, o máximo é 51.

16) (D) Sejam Q a interseção de AB e DE e R a interseção de AP e DE. Como os triângulos ABP e AQR são semelhantes, temos $\frac{AB}{AB+BQ} = \frac{AB}{AQ} = \frac{BP}{QR} = \frac{BC+CP}{QD+DR}$. Como $BC = QD = 2$, $BQ = 6$, $AB = 4$ e $CP = x$, segue que $\frac{5x}{2} + 3 = DR$. A área branca corresponde a metade da soma das áreas dos quadrados, portanto, podemos escrever:

$$(4 + 2x) + \left(\frac{21x}{2} + 9\right) = [ABP] + [CPRD] = 8 + 18 = 26.$$

Resolvendo a última equação, encontramos $x = \frac{26}{25}$.

17) (A) Sejam a e b, com $a < b < 2015$, os outros dois lados do triângulo ABC. Pela desigualdade triangular, $a + b > 2015 > b - a$. Considere os seguintes casos:

i) Se $b - a = 2014$, dado que $a \geq 1$, teríamos $b \geq 2015$ e isso seria um absurdo.

ii) Se $b - a = 2013$, dado que $b < 2015$, temos necessariamente que $a = 1$. Entretanto, neste caso, $a + b \leq 2015$ e isso gera um novo absurdo.

iii) Se $b-a=2012$, dado que $b<2015$, devemos ter $a=1$ ou $a=2$. O item anterior mostra que a primeira possibilidade não é possível e nos resta $(a,b)=(2{,}2014)$

Portanto, $a+b\geq 2016$ e $b-a\leq 2012$. Pela fórmula de Heron, o quadrado da área S do triângulo é dado por

$$S^2=\left(\frac{a+b+2015}{2}\right)\left(\frac{2015+b-a}{2}\right)\left(\frac{2015+a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-2015}{2}\right)$$
$$\geq \frac{4031}{16}\left[2015^2-(b-a)^2\right]\geq \frac{4031}{16}\left[2015^2-2012^2\right]$$

A igualdade ocorre apenas quando $b-a=2012$ e $a+b=2016$, ou seja,

$$(a,b)=(2{,}2014).$$

18) (C) Considere o circuncírculo S do triângulo *AMC*. Como $BC^2=AB\,.BM$, pela recíproca da potência de ponto, S é tangente à reta *BC*. Consequentemente, $MCB=CAB=\alpha$. Analisando os ângulos do triângulo *MCB*, podemos concluir que $\alpha+\beta=180°-\gamma$.

19) (B) Sejam $a_1,a_2,\dots,a_n$ os n naturais e $b_i=a_i-25$. Devemos ter que

$$n(0{,}65)<b_1+b_2+\cdots+b_n<n(0{,}75).$$

Ou seja, deve existir um inteiro entre dois múltiplos de 0,65 e 0,75. Considere agora os primeiros múltiplos de ambos:

N	$n(0{,}65)$	$n(0{,}75)$
1	0,65	0,75
2	1,3	1,5
3	1,95	2,25
4	2,6	3

O primeiro n para o qual isso ocorre é $n=3$. Um exemplo de tal conjunto de números é o conjunto $\{25{,}26{,}26\}$.

20) (D) Como o divisor é maior que o resto, o número n deve ser um divisor do número $2032-17=2015=5\cdot 13\cdot 31$ maior que 17. Tais divisores possíveis são: 31, $5\cdot 31$, $31\cdot 13$, $5\cdot 13\cdot 31$ e $5\cdot 13$.

21) (D) Como os números que indicam os meses sempre são menores que 24, qualquer um deles serve para indicar as horas. Além disso, como o número que indica os dias é sempre menor que 60, qualquer um deles serve para indicar os minutos. Assim, em todo dia do ano existe um momento encucado reverso. Para que uma data admita um momento encucado, basta que o número que indica o dia seja menor que 24. Além disso, existem momentos que podem ser simultaneamente encucados e encucados reversos. Isso ocorre quando tanto as horas e os minutos são iguais e menores ou iguais a 12. Portanto, existem 365 momentos encucados reversos, $23\times 12=276$ momentos encucados e 12 momentos tanto encucados reversos quanto encucados. A resposta é $365+276-12=629$.

22) (E) Seja x o comprimento do segmento FA. Como FC é tangente ao semicírculo, segue que $FE = FA = x$ e $CE = CB = 4$. Consequentemente, $DF = 4 - x$ e $FC = 4 + x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo DCF, obtemos

$$4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2$$

Resolvendo a equação anterior, encontramos $x = 1$. Portanto, $FC = 5$.

23) (C) Seja x o número escrito no quadrado central. Como cada perninha tem a mesma soma, a soma de todos os números escritos com exceção de x deve ser um múltiplo de 4. Ou seja, $1 + 2 + \ldots + 9 - x = 45 - x$ é um múltiplo de 4. Apenas 1, 5 e 9 possuem o mesmo resto que 45 na divisão por 4 e são, portanto, os únicos candidatos a ocupar o quadrado central. Resta mostrar que para cada um deles existe uma distribuição possível.
Para $x = 1$, considere os pares (2,9), (3,8), (4,7) e (5,6). Para $x = 5$, considere os pares (1,9), (2,8), (3,7) e (4,6). Para $x = 9$, considere os pares (1,8), (2,7), (3,6) e (4,5).

24) (C) Sejam v e 4v as velocidades de Jade e Esmeralda, respectivamente. Se t é o tempo que Esmeralda gastou para chegar no Jardim Botânico e d é a distância percorrida nesse trajeto, temos que $4vt = d$. Na volta de Esmeralda até metade do caminho, ela percorreu $\frac{d}{2} = 4v.(\frac{t}{2})$ e gastou $t/2$ minutos após o descanso. Portanto, Jade gastou $t + t/2 + 5$ minutos para percorrer $d/2 = 2vt$ do caminho. Ou seja, $v(t + t/2 + 5) = 2vt$ e, consequentemente, $t = 10$. Finalmente, o tempo gasto por Jade é $2(t + t/2 + 5) = 40$ minutos.

25) (C) Como 2015 não é múltiplo de 3, não é possível termos três parcelas iguais nas somas de Esmeralda. Se aparecem dois números repetidos, a soma será da forma $x + 2y$. Como queremos $x + 2y = 2015$, x é necessariamente ímpar e, uma vez definido o seu valor, teremos $y = \frac{2015-x}{2}$. Além disso, como x e y devem possuir três dígitos, temos $101 \leq x \leq 999$. Como existem 450 ímpares nesse intervalo, existem 450 possíveis somas da forma desejada. Note que o valor máximo de $x = 999$ implica o valor mínimo de $y = 508$ e o valor mínimo de $x = 101$ implica o valor máximo de $y = 957$, então os 450 ímpares geram valores válidos de y.