

**35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Primeira Fase – Nível 3**  
**Ensino Médio**

Esta prova também corresponde à prova da Primeira  
Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:  
**AL – BA – ES – MG – PA – PI – RS – SC**  
**São Carlos/SP**

**15 de junho de 2013**

A duração da prova é de 3 horas.

Cada problema vale 1 ponto.

Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.

Você pode solicitar papel para rascunho.

Entregue apenas a folha de respostas.

Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) Os algarismos desse ano, 2013 são 0, 1, 2 e 3, obviamente não nessa ordem. Daqui a quantos anos ocorrerá o próximo ano cujos algarismos serão 0, 1, 2 e 3 novamente?

- A) 2      B) 9      C) 18      D) 90      E) 1800

2) Se Joana comprar hoje um computador cujo preço é 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o preço do computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

- A) Nada, pois pagará a mesma quantia.  
B) Ela perderá 100 reais.  
C) Ela ganhará 105 reais.  
D) Ela perderá 95 reais.  
E) Ela perderá 105 reais.

3) O Aluno *D* (usaremos este codinome para proteger a identidade do aluno) não prestou atenção na aula e não aprendeu como verificar, sem realizar a divisão, se um número é múltiplo de 7 ou não. Por isso, *D* decidiu usar a regra do 3, ou seja, ele vai somar os dígitos e verificar se o resultado é um múltiplo de 7. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto indicará que um número é múltiplo de 7, sendo o número realmente múltiplo de 7?

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

4) Entre os números naturais de 1 até  $n$ , pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

- A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

5) Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de 1 a 2013, sendo um número para cada quadrado. Ela começa no canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna, de cima para baixo e continua, da mesma forma, preenchendo a terceira coluna, a quarta, etc., até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número 50 está na segunda coluna e o número 100 na quarta coluna, em qual coluna estará escrito o número 1000?

- A) 23      B) 31      C) 33      D) 39      E) 61

6) Sejam  $a, b$  reais positivos tais que  $\frac{a+2b}{b} = \frac{a+b}{a}$ . O valor de  $\frac{(a+b)^2}{ab}$  é:

- A) 4      B)  $3 + \sqrt{3}$       C)  $2 + 2\sqrt{2}$       D)  $2 + \sqrt{5}$       E) 5

7) Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Seja  $D$  o ponto médio de  $AC$ . Sabendo que  $BD = 3DC$  e que  $AC = 2$ , a hipotenusa do triângulo é:

- A)  $\sqrt{7}$       B)  $2\sqrt{2}$       C) 3      D)  $\sqrt{10}$       E)  $2\sqrt{3}$

8) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha  $n$  possui exatamente  $n$  números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: **1**  
 Linha 2: **3 5**  
 Linha 3: **7 9 11**  
 Linha 4: **13 15 17 19**

...

Em qual linha aparecerá o 2013?

- A) 45      B) 46      C) 62      D) 63      E) 64

9) Dizemos que duas retas ou segmentos de retas são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas as retas ou segmentos de retas. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

- A) 6      B) 8      C) 12      D) 24      E) 36

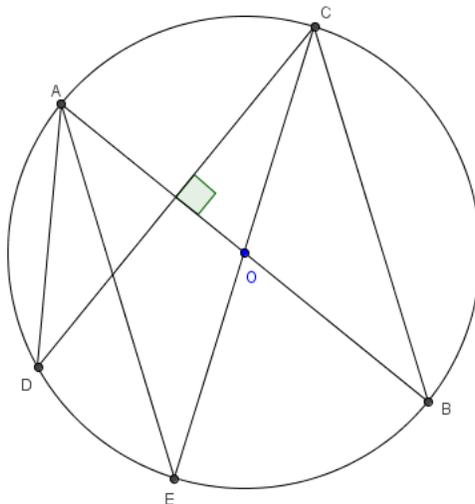
10) Determine  $x + y$ , onde  $x$  e  $y$  são reais, sabendo que  $x^3 + y^3 = 9$  e  $xy^2 + x^2y = 6$ .

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

11) Considere cinco pontos no plano. Qual é a quantidade máxima de triângulos equiláteros com vértices em três desses cinco pontos?

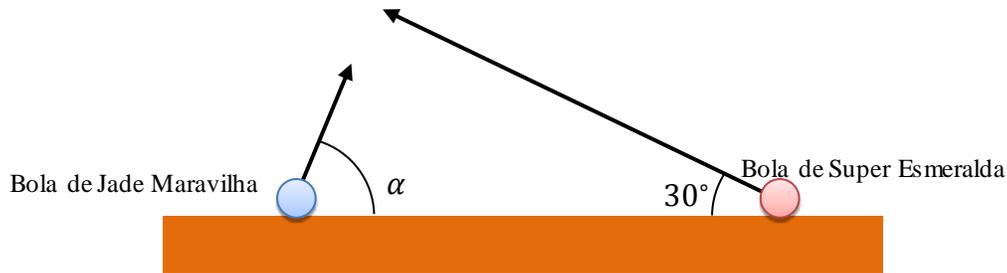
- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

12) Na figura abaixo o ponto  $O$  é o centro da circunferência que passa pelos pontos  $A, B, C, D$  e  $E$ . Sabendo que o diâmetro  $AB$  e a corda  $CD$  são perpendiculares e que  $\angle BCE = 35^\circ$  o valor em graus do ângulo  $\angle DAE$  é:



- A)  $35^\circ$       B)  $10^\circ$       C)  $20^\circ$       D)  $30^\circ$       E)  $55^\circ$

13) Super Esmeralda e Jade Maravilha estão jogando bilhar. Super Esmeralda dá uma tacada em uma bola com velocidade de 60 km/h, com um ângulo de  $30^\circ$  com uma das tabelas. Jade Maravilha deve acertar a bola de Super Esmeralda com outra bola. As duas bolas partem da tabela da mesa simultaneamente, e estão a uma distância de 50 cm. Jade Maravilha pode escolher qualquer ângulo para dar a sua tacada.



Qual é a velocidade mínima com que Jade Maravilha pode dar sua tacada?

- A) 15 km/h    B) 30 km/h    C)  $30\sqrt{2}$  km/h    D)  $30\sqrt{3}$  km/h    E) 60 km/h

14) Seja  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Considere uma função  $f: S \rightarrow S$  definida pela tabela a seguir

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	3	5	7	2	9	6	1	4

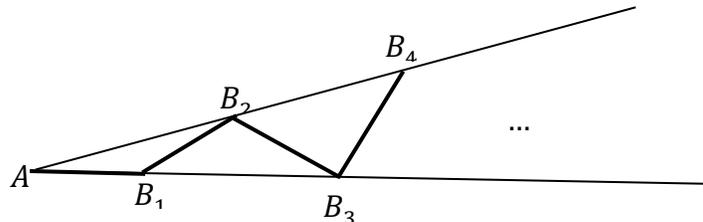
Qual é o menor valor inteiro positivo de  $n$  para o qual  $\underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ vezes}} = x$  para todo  $x \in S$ ?

- A) 4    B) 5    C) 6    D) 12    E) 24

15) Uma *potência perfeita* é um número inteiro da forma  $a^b$ ,  $a$  e  $b$  inteiros,  $b > 1$ . Seja  $f(n)$  a maior potência perfeita que não excede  $n$ . Por exemplo,  $f(7) = 4$ ,  $f(8) = 8$  e  $f(99) = 81$ . Sorteando ao acaso um número inteiro  $k$  com  $1 \leq k \leq 100$ , qual a probabilidade de  $f(k)$  ser um quadrado perfeito?

- A) 64%    B) 72%    C) 81%    D) 90%    E) 96%

16) Na figura a seguir,  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n$ . Os pontos  $B_1, B_3, B_5, \dots$  pertencem a uma reta e os pontos  $B_2, B_4, B_6, \dots$  pertencem a outra reta. Todos os pontos  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  são distintos.



Sabendo que o ângulo  $B_1\hat{A}B_2$  mede  $1^\circ$ , qual é o maior valor possível de  $n$ ?

- A) 6    B) 7    C) 10    D) 90    E)  $n$  pode ser arbitrariamente grande

17) Num circo, a atração principal é a *Corrida de Pulgas*. Duas pulgas,  $P_1$  e  $P_2$ , perfeitamente treinadas, saltam ao longo de uma linha reta, com velocidades constantes, partindo de um mesmo ponto e no mesmo instante. Cada salto da pulga  $P_1$  tem alcance  $m$  centímetros e cada salto da pulga  $P_2$  tem alcance  $n$  centímetros, com  $m < n$ , ambos inteiros. Porém a pulga  $P_1$  é mais rápida que a pulga  $P_2$ , de modo que, independente da velocidade de  $P_2$ ,  $P_1$  sempre pode alcançá-la após alguns saltos. Supondo que, após a largada, as pulgas estarão juntas, pela primeira vez, ao final de 1 metro, determine o número de pares  $(m, n)$  possíveis.

- A) 12            B) 24            C) 36            D) 48            E) 100

18) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?

- A) 330            B) 348            C) 512            D) 676            E) 900

19) Qual dos seguintes números é o mais próximo da quantidade de algarismos de  $3^{400}$ ?

- A) 100            B) 150            C) 200            D) 240            E) 300

20) Para quantos inteiros positivos  $k$  menores que 2013, existem inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , não necessariamente distintos, satisfazendo

$$a^2 + b + c = b^2 + c + a = c^2 + a + b = k ?$$

- A) 43            B) 44            C) 87            D) 88            E) 89

21) No trapézio  $ABCD$ , com  $AB$  paralelo a  $CD$ , o ângulo  $B\hat{A}D$  mede  $82^\circ$  e o ângulo  $A\hat{B}C$  mede  $74^\circ$ . Suponha que exista um ponto  $P$  sobre o lado  $CD$  tal que  $AD + DP = PC + CB = AB$ . Quanto mede o ângulo  $A\hat{P}B$ ?

- A)  $76^\circ$             B)  $77^\circ$             C)  $78^\circ$             D)  $79^\circ$             E)  $80^\circ$

22) Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

- A) Menos de 1000  
 B) Mais de 1000 e menos de 2000  
 C) Mais de 2000 e menos de 3000  
 D) Mais de 3000 e menos de 4000  
 E) Mais de 4000

23) Se  $x$  e  $y$  são inteiros positivos tais que  $x(x + 2 + 4 + 6 + \dots + 4024) = 2013^y$ , qual é o valor de  $y$ ?

- A) 1            B) 2            C) 3            D) 4            E) 5

24) Um polinômio  $p(x)$  é par quando  $p(-x) = p(x)$ , para todo  $x$  real. Qual é o número máximo de soluções reais da equação  $p(x) = k$ , sendo  $p$  um polinômio par não constante com coeficientes não negativos e  $k$  um real fixado?

- A) 0            B) 1            C) 2            D) 4            E)  $n$ , em que  $n$  é o grau de  $p(x)$

25) Oito dos vértices de um dodecaedro regular de aresta 1 são vértices de um cubo. Qual é o volume desse cubo?

- A)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$             B)  $\sqrt{5}$             C)  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$             D)  $1 + \sqrt{5}$             E)  $2 + \sqrt{5}$