Olimpíada Brasileira de Matemática

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)

GABARITO

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) E	6) E	11) E	16) B	21) D
2) A	7) B	12) D	17) D	22) A
3) C	8) D	13) A	18) E	23) C
4) B	9) D	14) A	19) D	24) C
5) C	10) A	15) E	20) B	25) E

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**

1) (E) Os seguintes exemplos mostram que qualquer uma das letras pode figurar na casa cinza:

O	B	O
M	O	B
O	B	O

O	B	O
M	O	B
O	B	M

O	B	O
M	O	M
O	M	B

2) (A) Sendo *x* a posição de Josias, $x - 1$ pessoas chegaram antes dele e $2016 - x$ pessoas chegaram depois dele. Assim, $x - 1 = \frac{2016 - x}{4} \Leftrightarrow 4(x - 1) = 2016 - x$, ou seja, $x = 404$.

3) (C) Sejam *x* e *y* as dimensões do retângulo e *n* o lado do quadrado.

Como $2x + 2y = 58$, temos $x + y = 29$. Supondo $x \leq y$, as possíveis dimensões do retângulo são: $(x, y) = (1,28), (2,27), (3,26), \ldots, (14,15)$.

Destes pares, apenas o $(4,25)$ tem como produto de seus elementos um quadrado perfeito, que é o $4 \cdot 25 = 100$. Logo, o lado do quadrado é $n = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

4) (B) Sendo $A_1A_2\ldots A_{2016}$ o polígono regular da base, tome o vértice no plano perpendicular à base passando pela diagonal A_1A_{1009} de maneira que a projeção do vértice sobre o plano seja distinta do centro do polígono. Este plano é um plano de simetria do polígono e portanto temos 1008 pares de triângulos congruentes e podemos assim escolher 1008 faces laterais que não sejam congruentes dois a dois.

Por outro lado, se há menos de 1008 faces laterais não congruentes duas a duas, temos no máximo 1007 classes de faces laterais congruentes. Desta maneira, pelo princípio da casa dos pombos, existem três faces laterais na mesma classe e assim o vértice equidista de três vértices do polígono. Desta maneira, a projeção do vértice seria o circuncentro do triângulo formado por estes três vértices, que coincide com o centro do polígono, absurdo, pois a pirâmide não é regular.

5) (C) A primeira pessoa a responder não pode estar dizendo a verdade, pois assim parte das pessoas que estão atrás dela também estão falando a verdade ao dizerem que a pessoa à sua frente é mentirosa. Como a primeira pessoa a responder mentiu, a segunda pessoa falou a verdade. Assim a terceira pessoa mentiu e a quarta falou a verdade. Repetindo essa análise, podemos conluir que as pessoas na fila se alternam entre honestos e mentirosos. Logo, existem $2016/2 = 1008$ pessoas mentirosas na fila.

6) (E) Em um conjunto com *n* elementos, a quantidade de subconjuntos formados por dois de seus elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$. Sejam *x* e *y* as quantidades de números pares e ímpares na lista de Janaína, respectivamente. Temos $x + y = 10$ e, pela condição dada no enunciado, $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 4xy\ (*)$, pois a soma de dois números com paridades diferentes gera um número ímpar e a soma de dois números de mesma paridade gera um número par.

Substituindo $y = 10 - x$ na última equação, concluímos que $x^2 - 10x + 9 = 0$. Essa equação possui duas soluções: $x = 1$ ou $x = 9$. Como $(x, y) = (9,1)$ satisfaz a condição $(*)$, o valor máximo de *x* é 9.

7) (B) Inicialmente, dividindo igualmente as despesas, no total de 6000 reais, caberia a cada um arcar com $\frac{6000}{x}$ reais. Como na última hora três dos amigos desistiram, cada um dos que foram viajar arcou com $\frac{6000}{x-3}$ reais, o que trouxe uma despesa extra de 100 reais para cada, ou seja,

$$\frac{6000}{x} + 100 = \frac{6000}{x-3} \Leftrightarrow 60(x-3) + x(x-3) = 60x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60x - 180 + x^2 - 3x = 60x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

8) (D) O ângulo interno de qualquer vértice de um polígono regular de *n* lados é $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$.

Consequentemente, $\angle ABL = 90°$, $\angle ABI = 108°$, $\angle ABC = 135°$. Daí, $\angle CBI = 27°$ e $\angle LBC = 360° - 90° - 135° = 135°$. Como $LB = BC = BI$, os triângulos *LBC* e *CBI* são isósceles de bases *LC* e *CI*. Assim

$$x = \angle LCB + \angle BCI = \frac{180° - 135°}{2} + \frac{180° - 27°}{2} = 99°.$$

9) (D) A sequência $BBBPBPPP$ possui oito pérolas e nenhuma sequência equivalente.
Considere uma sequência qualquer com 9 pérolas. Dividamos o problema em dois casos:
1) Se não existam três delas consecutivas com a mesma cor, então ou as pérolas estão distribuídas em cores alternadas ao longo do colar ou existem duas de mesma cor. Se elas possuem cores alternadas, digamos $BPBPBP$..., qualquer trecho com 5 pérolas consecutivas conterá 2 sequências equivalentes. Se existem duas consecutivas de mesma cor entre as 7 pérolas que não são extremos do colar, digamos BB, os seus vizinhos devem ser ambos da cor oposta, ou seja, devemos encontrar a sequência $PBBP$. Como mencionado no enunciado, existem duas sequências equivalentes neste trecho do colar. Caso as 7 pérolas que não são extremos tenham cores alternadas, seguindo o caso anterior, qualquer trecho de 5 delas conterá duas 2 sequências equivalentes.

2) Se existem três pérolas consecutivas de mesma cor, digamos BBB, e se uma das duas continuações em seus extremos não for da cor oposta, teremos imediatamente duas sequências equivalentes. Supondo agora que suas continuações são da cor oposta, se elas não estiverem em um dos extremos do colar, aparecerá o trecho $PBBBP$ que contém duas sequências equivalentes. Caso BBB esteja em um dos extremos, digamos no esquerdo; e não existam três letras consecutivas de mesma cor fora dos extremos, então as suas possíveis continuações são:

$$BBBPPB, BBBPBB, BBBPBP$$

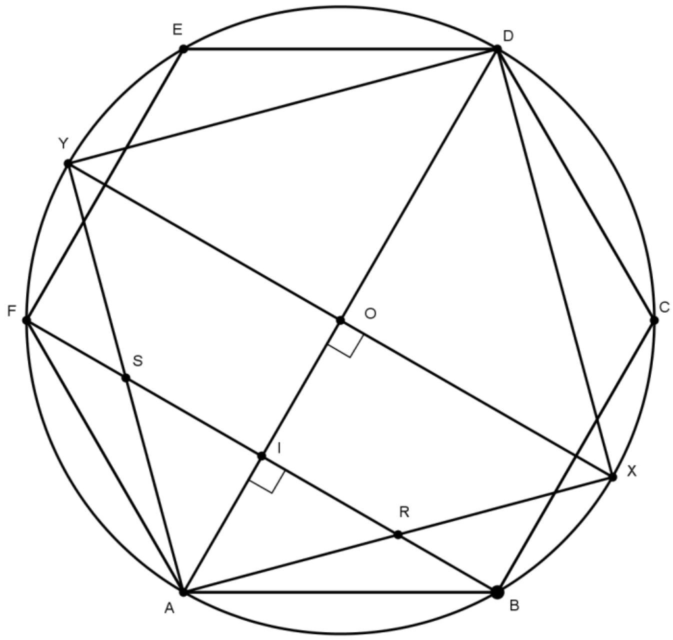
Nas duas primeiras continuações anteriores, temos 3 sequências equivalentes. Para não formarmos duas sequências equivalentes a única continuação possível é:

$$BBBPBPPP$$

Agora, qualquer acréscimo de nova pérola no extremo direito, gera duas sequências equivalentes.

Ou seja, qualquer sequência com 9 pérolas possuirá duas sequências equivalentes.

10) (A)

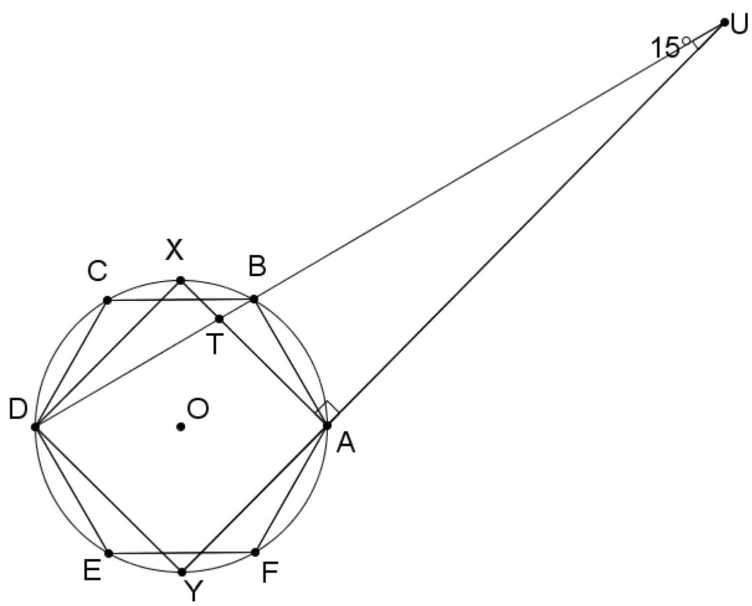


Sejam I a interseção de AD e BF e O o centro da circunferência. Como $FA = AB$ e $AY = AX$, segue que os arcos FX e BX são iguais, ou seja, $FB \parallel XY$. Assim, os triângulos RSA e XYA são semelhantes e

$$\frac{\mathrm{SR}}{2} = \frac{SR}{XY} = \frac{AI}{AO} = \frac{1 \cdot (\operatorname{sen}\angle ABI)}{1} = \frac{1}{2},$$

pois $\angle ABI = 30^{\circ}$ e $AB = AO = OB$. Logo, $SR = 1$.

11) (E)



Temos que $m(T\hat{A}U) = 90^\circ$, pois $XAYD$ é quadrado. Também temos que $m(T\hat{U}A) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DY}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2} = 15^\circ$ e $m(U\hat{B}A) = m(A\hat{Y}D) = 90^\circ$, pois $ABDY$ é inscritível. Como AB é lado do hexágono inscrito na circunferência de raio 1, temos que $AB = 1$. Assim no triângulo retângulo UBA, $AT = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 15^\circ}$ e no triângulo retângulo TAU, $\dfrac{AU}{TU} = \cos 15^\circ \Leftrightarrow TU = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 4$, onde usamos que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

12) (D) Reescreva a equação como $\{x\} = \dfrac{\lfloor x \rfloor - 38}{2016}$. Como $0 \le \{x\} < 1$, devemos ter

$$0 \le \frac{\lfloor x \rfloor - 38}{2016} < 1 \Leftrightarrow 38 \le \lfloor x \rfloor < 2054.$$

Como $\lfloor x \rfloor$ é inteiro, pode varia de 38 a 2053, em um total de 2016 números. Para cada valor de $\lfloor x \rfloor$, temos um valor de x correspondente, o que nos dá um total de 2016 soluções.

13) (A) Iniciaremos escolhendo as casas da primeira e da última linha, o que pode ser feito de $(n-2)(n-3)$ maneiras, uma vez que os quatro cantos do tabuleiro são proibidos. Feito isto, as $n-2$ casas restantes podem ser escolhidas de $(n-2)!$ maneiras, pois podemos pensar nesta escolha como uma permutação de $n-2$ elementos. Desta maneira, pelo princípio multiplicativo, há $(n-2)(n-3)(n-3)!$ maneiras de escolhermos as casas com as condições impostas.

14) (A) Como todos os algarismos são não nulos, podemos simplificar a igualdade, cancelando os termos repetidos e obtendo: $Z = S^3 \times I^2$. Como Z é um algarismo, temos que $S = 1$ ou $S = 2$. No primeiro caso, $I^2 = 4$ ou $I^2 = 9$. No segundo caso, a única opção é $I^2 = 1$. Assim, as possibilidades são: $(S, I) = (1,2), (1,3)$ ou $(2,1)$. Dado que *E* é diferente de *I* e *S*, temos 7 opções para a sua escolha.

Vejamos numa tabela quais os possível produtos $P = S \times E \times I \times S$ e de Z oriundos destas escolhas.

S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z	S	I	E	P	Z
1	2	3	6	4	1	3	2	6	9	2	1	3	12	8
1	2	4	8	4	1	3	4	12	9	2	1	4	16	8
1	2	5	10	4	1	3	5	15	9	2	1	5	20	8
1	2	6	12	4	1	3	6	18	9	2	1	6	24	8
1	2	7	14	4	1	3	7	21	9	2	1	7	28	8
1	2	8	16	4	1	3	8	24	9	2	1	8	32	8
1	2	9	18	4	1	3	9	27	9	2	1	9	36	8

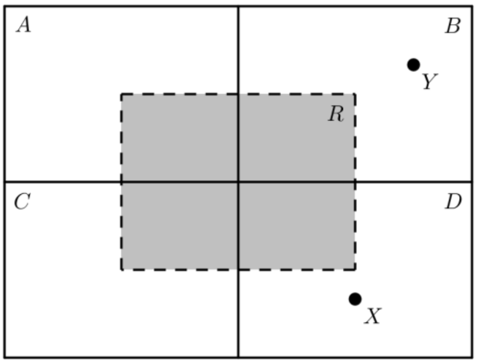
Da tabela anterior, excluindo as combinações que fazem Z ser uma das letras já escolhidas, podemos concluir que existem 12 valores distintos para P: $6, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28$ e 36.

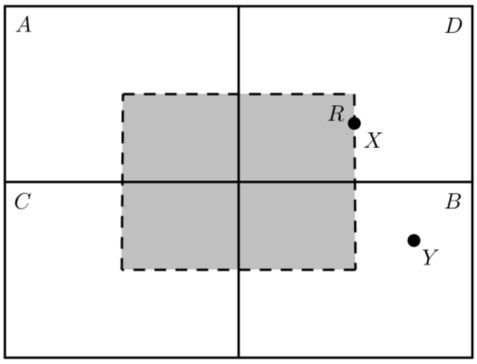
15) (E) Temos que $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pois há 2 casos favoráveis (resultados iguais a 5 ou 6) e 6 casos possíveis.

Para calcular p_2, temos que o número de casos possíveis é $6^2 = 36$. Para os casos favoráveis, veja que devemos ter soma dos dados iguais a 10, 11 ou 12. Para termos soma 10, podemos ter (6,4), (5,5) e suas permutações. Para soma 11, podemos ter (6,5) e suas permutações e para soma 12, podemos ter (6,6). Há assim um total de 2 + 1 + 2 + 1 = 6 casos favoráveis. Logo $p_2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Finalmente, para calcular p_3, temos que o número de casos possíveis é $6^3 = 216$. Para os casos favoráveis, devemos ter soma dos dados iguais a 15, 16, 17 ou 18. Para soma 15, podemos ter (6,6,3), (6,5,4), (5,5,5) e suas permutações; para soma 16, podemos ter (6,6,4), (6,5,5) e suas permutações; para soma 17, podemos ter (6,6,5) e suas permutações e para soma 18, podemos ter (6,6,6). Há assim um total de $3+6+1+3+3+3+1=20$ casos favoráveis. Logo $p_3 = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$. Desta maneira, temos que $p_3 < p_2 < p_1$.

16) (B) Divida a tela do videogame, usando as mediatrizes dos seus lados, em quatro retângulos iguais denotados por *A*, *B*, *C* e *D*. Considere ainda o retângulo sombreado R formados pelos centros destes quatro retângulos.





A distância de videogame sempre é menor ou igual à distância euclidiana usual na tela e a troca de posição de 2 desses 4 retângulos com um lado em comum não muda a distância de videogame entre dois pontos quaisquer inseridos neles, apesar de eventualmente mudar a distância euclidiana na tela. Veja a figura anterior. Consequentemente, dados quaisquer dois pontos da tela, após algumas trocas de posições de retângulos, podemos supor que existem dois pontos no retângulo *R* cuja distância euclidiana é igual à distância de videogame entre eles. Como a maior distância em *R* é sua diagonal, que mede $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = 2{,}5$, podemos concluir que nenhuma distância de videogame entre dois pontos é maior que 2,5. Além disso, veja que a distância de videogame entre o centro da tela e qualquer um dos cantos é 2,5.

17) (D) O sistema pode ser reescrito como $abc = b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = a^2 + b^2$, com a,b,c não nulos.

Desta maneira, obtemos que $a^2 = b^2 = c^2$. Logo há dois números iguais e suporemos $a = b$ (depois basta permutar para obter as outras soluções).

Se $a = b = c$, temos que $a = b = c = 2$ e obtemos a solução $(2,2,2)$.

Se $a = b = -c$, temos que $a = b = -2$ e $c = 2$, o que nos dá a solução $(-2,-2,2)$. Permutando esta tripla, obtemos também as soluções $(-2,2,-2)$ e $(2,-2,-2)$, o que nos dá um total de 4 soluções.

18) (E) Note que um mês possui 4 ou 5 sábados e que $365 = 7 \cdot 52 + 1$. Então, um ano possui 52 semanas completas e 1 ou 2 dias extras, dependendo dele ser ou não bissexto. Desse modo, um ano terá 52 ou 53 sábados e, chamando de x o número de meses com 5 sábados, podemos analisar as equações:

$5x + 4(12 - x) = 52 \Leftrightarrow x + 48 = 52 \Leftrightarrow x = 4$;

$5x + 4(12 - x) = 53 \Leftrightarrow x + 48 = 53 \Leftrightarrow x = 5$.

Então, um ano é sabadoso quando possui 53 sábados e isso acontece quando 1 de janeiro é sábado ou quando 2 de janeiro é sábado e o ano é bissexto, como acontece com 2016. Quando um ano é bissexto, o dia 1 de janeiro "avança dois dias na semana" em relação ao ano anterior e, quando o ano não é bissexto, "ele avança apenas um dia na semana" também em relação ao ano anterior. Desse modo, podemos montar a tabela a seguir com os dias 1 de janeiro dos próximos anos.

Ano	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
1 de jan	sexta	domingo	segunda	terça	quarta	sexta	sábado

Portanto, o próximo ano sabadoso será 2022.

19) (D) O conjunto $\{1,2,3,5,29,869\}$ tem a propriedade do enunciado. Provaremos agora que X não pode ter 7 elementos, o que mostrará que a quantidade máxima de elementos é 6.

Suponha por absurdo que X possui 7 elementos, digamos $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, com $a_i < a_j$, se $i < j$.

Afirmamos agora que $\text{mdc}(a_i, a_j) = 1$ se $i \neq j$. De fato, se $p \mid a_i$ e $p \mid a_j$, supondo sem perdas $i < j$, temos que $a_i \mid a_j + 1$. Logo $p \mid a_j + 1$ e $p \mid a_j$, o que nos dá que $p = 1$, como queríamos.

Como $a_7 + 1$ é múltiplo de $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, segue que $a_7 + 1$ é múltiplo do produto $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$. Como os números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ são primos entre si dois a dois, temos que $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Logo $a_7 \geq 2309$, o que é absurdo, pois $a_7 \leq 2016$.

20) (B) Considere um número de até quatro dígitos, denotado por $\overline{\overline{abcd}}$, e veja que a diferença entre ele a soma dos seus dígitos é:

$$\overline{\overline{abcd}} - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c.$$

Se $a \geq 1$, o resultado passa de 1000. Além disso, se um número possuir 5 ou mais dígitos, uma diferença semelhante à mencionada anteriormente, também será maior que 1000. Se $a = 0$, temos 10 opções para o b, 10 opções para o c e devemos subtrair a opção em que ambos são zero, pois só nos interessa resultados maiores que 1 e menores que 1000. Então, nesse caso, temos $10 \cdot 10 - 1 = 99$ números sagazes. Se $a = 1$, então a diferença será menor que 1000 apenas para $b = c = 0$ e isto nos produz o número sagaz 999. Note que não há números contados com repetição, pois para dígitos a, b, c, x, y, z a igualdade $999a + 99b + 9c = 999x + 99y + 9z$ é equivalente a $999(a - x) + 99(b - y) + 9(c - z) = 0$ e isto implica $a = x$, $b = y$ e $c = z$. Concluímos então que existem $99 + 1 = 100$ números sagazes maiores que 1 e menores que 1000.

21) (D) A soma total das quantidades de pedras é $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 11 = 56$. Para que as pilhas possuam uma mesma quantidade *k* de pedras este inteiro deve ser um divisor de 56. Além disso, como alguma das pilhas no final do processo conterá a pilha com 11 pedras, cada uma deve ter 11 ou mais pedras. Analisando os divisores de 56, temos apenas as possibilidades 14, 28 e 56 como possíveis valores de *k*. Veja que a cada junção de pilhas, a quantidade total delas diminui em apenas uma unidade. Assim, para que no final tenhamos apenas uma pilha com 56 pedras, serão necessários 9 usos da operação. Para obtermos duas pilhas com 28, precisamos fazer 8 operações. Finalmente, para obtermos 4 pilhas com 14, precisamos usar 6 operações. De fato, podemos executar explicitamente essas 6 operações indicando-as pelo símbolo de + e agrupando as pilhas correspondentes entre parênteses:

$$(11 + 3), (9 + 5), (8 + 6), (7 + 4 + 2 + 1)$$

22) (A) Como o lado do quadrado mede 6, temos $DM = MC = CE = 3$. Os triângulos CEH e DEA são semelhantes. Daí,

$$\frac{CH}{DA} = \frac{CE}{DE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $CH = 6/3 = 2$ e $HB = CB - CH = 4$. A área do quadrilátero $CHAM$, denotada por $[CHAM]$, pode ser obtida através da equação:

$$[CHAM] = [ACM] + [ACH] = \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 15.$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ADE, temos

$$[AEFG] = AE^2 = AD^2 + DE^2 = 117.$$

Logo,

$$\frac{[CHAM]}{[AEFG]} = \frac{15}{117} = \frac{5}{39}.$$

23) (C) Considere a função f tal que se $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos de n, então $f(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k + 1$; defina também $f(1) = 1$. Esta função é tal que se m é múltiplo de n, com $m > n$, então $f(m) > f(n)$. Para esta função, temos que $f(2016) = f\left(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 5 + 2 + 1 + 1 = 9$.

Provaremos agora por indução forte em n que se n possui t fatores primos (contando repetições), então $f(n) \geq t + 1$.

Como f toma valores nos inteiros positivos, temos que $f(1) \geq 1$ e como 2 é múltiplo de 1, segue que $f(2) > f(1)$ e portanto $f(2) \geq 2$, o que mostra os casos iniciais da indução.

Suponha agora que para todo $k < n$, a propriedade é válida. Se n é primo, $f(n) > f(1)$ e então $f(n) \geq 2$, como queríamos. Se n não é primo, tome p um fator primo de n. Logo $f(n) > f\left(\frac{n}{p}\right)$. Se n tem t fatores primos, $\frac{n}{p}$ possui $t - 1$ fatores primos e por hipótese de indução, $f\left(\frac{n}{p}\right) \geq t$. Logo $f(n) > f\left(\frac{n}{p}\right) \geq t$ e então $f(n) \geq t + 1$, como queríamos.

Desta forma, mostramos que $f(2016) \geq 9$ e então o valor mínimo buscado é de fato 9.

24) (C) Considerando 2006 números iguais a 1 e os outros 10 números iguais a 2, temos que a soma é igual a $2006 + 10 \cdot 2 = 2026$ e o produto é igual a $2^{10} = 1024$. Neste caso, a soma é maior ou igual ao produto.

Provaremos agora que devemos ter pelo menos 2006 números iguais a 1. Para isso, suponha por absurdo que há k números iguais a 1, com $k \leq 2005$.

Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2016}$ os números. Logo temos que $k + x_{k+1} + \dots + x_{2016} \geq x_{k+1} \dots x_{2016}$. Usaremos agora que $k + x_{k+1} + \dots + x_{2016} \leq k + (2016 - k)x_{2016}$ e que $x_{k+1} \dots x_{2016} \geq 2^{2015-k} x_{2016}$.

Desta forma, segue que:

$$
\begin{aligned}
&k + (2016 - k)x_{2016} \geq 2^{2015-k} x_{2016} \Leftrightarrow \\
&x_{2016}\left(2^{2015-k} + k - 2016\right) \leq k
\end{aligned}
$$

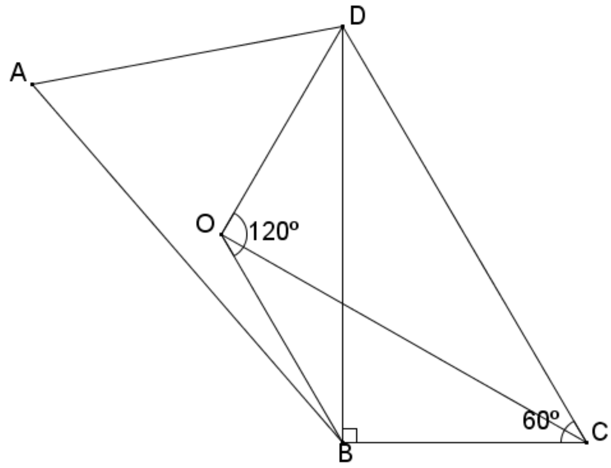
Como $k \leq 2005$, $2^{2015-k} + k - 2016 > 0$ e usando que $x_{2016} \geq 2$, segue que

$$
\begin{aligned}
&2^{2016-k} + 2k - 4032 \leq k \Leftrightarrow \\
&2^{2016-k} + k \leq 4032
\end{aligned}
$$

Para $k \leq 2004$, $2^{2016-k} \geq 2^{12} = 4096$ e temos absurdo. Por outro lado, para $k = 2005$, deveríamos ter $2^{11} + 2005 = 4043 \leq 4032$, o que também é absurdo.

Com isso, segue que pelo menos 2006 dos números são iguais a 1.

25) (E)



Sendo O o circuncentro do triângulo ABD, segue que $m(B\hat{O}D)$ = 120º e então o quadrilátero $BCDO$ é inscritível. Temos que $m(C\hat{O}D) = m(C\hat{B}D) = 90^\circ$ e $m(O\hat{C}D) = m(O\hat{B}D) = 30^\circ$.

Desta forma, no triângulo retângulo DOC, a razão pedida é igual a $\dfrac{CO}{CD} = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.