# XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
# PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
# GABARITO

## GABARITO NÍVEL 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) E | 6) C | 11) E | 16) B | 21) D |
| 2) C | 7) D | 12) C | 17) A | 22) A |
| 3) B | 8) B | 13) B | 18) A | 23) B |
| 4) D | 9) D | 14) A | 19) B | 24) E |
| 5) D | 10) D | 15) A | 20) C | 25) B |

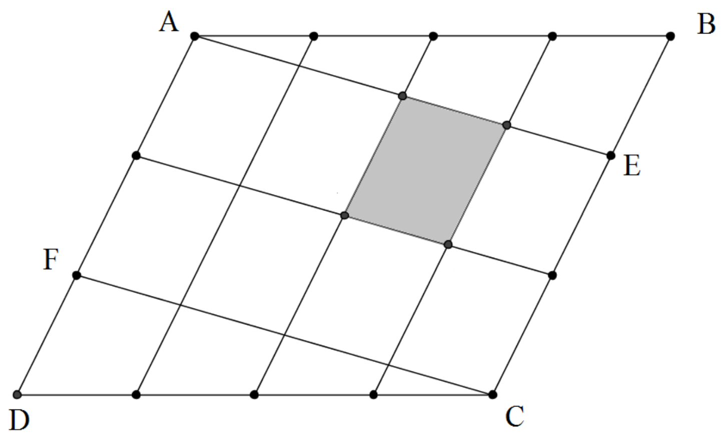
- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

**1) (E)** A alternativa *A* possui duas vogais, a *B* duas também, a *C* três, a *D* apenas uma e a *E* duas vogais. Desta forma, a opção correta é a alternativa *E*.

**2) (C)** Temos que a expressão é $\frac{M^2 \times E}{I \times C \times A}$. Para maximizá-la, devemos fazer o numerador o maior possível e o denominador o menor possível. Para isso, tomamos $M = 9$, $E = 8$, $I = 1$, $C = 2$ e $A = 3$. Desta forma, o valor máximo é $\frac{9^2 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 108$.

**3) (B)** Como cada pergunta admite duas respostas, cada entrevistado pode responder o questionário de 16 maneiras diferentes. Assim, o número mínimo de entrevistados para que se garanta a existência de duas respostas completamente iguais é 17, pelo Princípio da Casa dos Pombos.

**4) (D)** Considerando o paralelogramo *ACEF*, como $AF = \frac{2AD}{3}$, temos que a área de *ACEF* é igual a $\frac{2}{3} \cdot 84 = 56$. Este paralelogramo está dividido em oito paralelogramos iguais, sendo que a área sombreada é um destes paralelogramos e, portanto, a área desejada é $\frac{1}{8} \cdot 56 = 7$.



**5) (D)** Note que se estivermos na edição de número $x$ da OBM, estaremos no ano de $1978+x$. Assim, estamos interessados no maior valor possível de $\text{mdc}(x, 1978+x)$. Pelo Algoritmo de Euclides, $\text{mdc}(x, 1978+x) = \text{mdc}(x, 1978)$. O maior valor possível para esse mdc é 1978, que pode ser atingido tomando $x = 1978$.

**6) (C)** Temos que $ABC = 100A + 10B + C + 100B + 10C + A + 100B + 10A + C$. Escrevendo igualdades análogas para os outros números, temos que a condição do enunciado é $100A + 10B + C + 100B + 10C + A + 100A + 10B + C = 10 \cdot 111A \Leftrightarrow 111(A + B + C) = 10 \cdot 111A$.

Assim, $B + C = 9A$. Se $A = 1$, temos os oito pares $(1,8), (2,7) \ldots, (8,1)$ e se $A = 2$, temos o único par (9, 9), totalizando nove números $ABC$.

**7) (D)** Podemos posicionar o quadrado de lado 2 de cinco maneiras diferentes. Em cada uma dessas maneiras, a posição das peças em formato de L estará bem determinada. Portanto, temos cinco possíveis maneiras de cobrir o tabuleiro.

**8) (B)** Se $x^2 = 2x + 4$, temos que $x^2 - 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 1 \Leftrightarrow (x+1)^{-1} = x - 3$.

**9) (D)** Sendo $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{C}B) = \alpha$, teremos que $m(B\hat{A}C) = \alpha$ e $m(C\hat{B}D) = 180 - 3\alpha$. Daí, teremos que $m(B\hat{D}C) = 180 - 3\alpha$ e $m(A\hat{C}D) = 5\alpha - 180$. Temos que $\alpha$ e $5\alpha - 180$ são inteiros e devemos ter $0 < 5\alpha - 180 < 180$ e $0 < 180 - 3\alpha < 180$, o que nos dá $36° < \alpha < 60°$. Para cada um dos valores de $\alpha$ compreendidos neste intervalo, temos um quadrilátero diferentes. Temos no total $59 - 37 + 1 = 23$ valores.

**10) (D)** Sejam $a < b < c < d < e$ as massas dos cinco estudantes. Temos então que $a + b = 90$ e $d + e = 101$. Somando as massas de todos os possíveis pares de estudantes, temos que $4(a + b + c + d + e) = 956 \Leftrightarrow a + b + c + d + e = 239$. Logo, $c = 48$.

**11) (E)** Temos que $f(2012) = 3f(670) = 3(3f(223) + 2) = 9f(223) + 6$. Mas $f(223) = 3f(74) + 2 = 9f(24) + 2 = 27f(8) + 11 = 81f(2) + 11 = 11$.

Logo, $f(2012) = 9 \cdot 11 + 6 = 105$.

**12) (C)** Como $A\hat{P}E = A\hat{B}E = 90°$, o quadrilátero APBE é inscritível. Da mesma maneira, o quadrilátero DBQC é inscritível. Assim, temos que $P\hat{B}A = P\hat{E}A$ e que $Q\hat{B}C = Q\hat{D}C$. Daí, $P\hat{B}Q = P\hat{B}A + 90° + Q\hat{B}C = P\hat{E}A + 90° + Q\hat{D}C$. Mas no triângulo $DEF$, temos pelo teorema do ângulo externo que $40° = A\hat{F}D = P\hat{E}A + Q\hat{D}C$. Assim, $P\hat{B}Q = 90° + 40° = 130°$.

**13) (B)** Entre o dia 29 de fevereiro de um ano bissexto e o dia 29 de fevereiro do próximo ano bissexto, passam-se 366 + 365 + 365 + 365 = 1461 dias. Como 1461 deixa resto 5 na divisão por 7, teremos o seguinte:

29 de fevereiro de 2012: quarta-feira

29 de fevereiro de 2008: sexta-feira

29 de fevereiro de 2004: domingo

Os dias de semanas se repetem de 28 em 28 anos. Assim, se 29 de fevereiro de 2004 foi domingo, é porque dia 29 de fevereiro de 1976 também foi domingo.

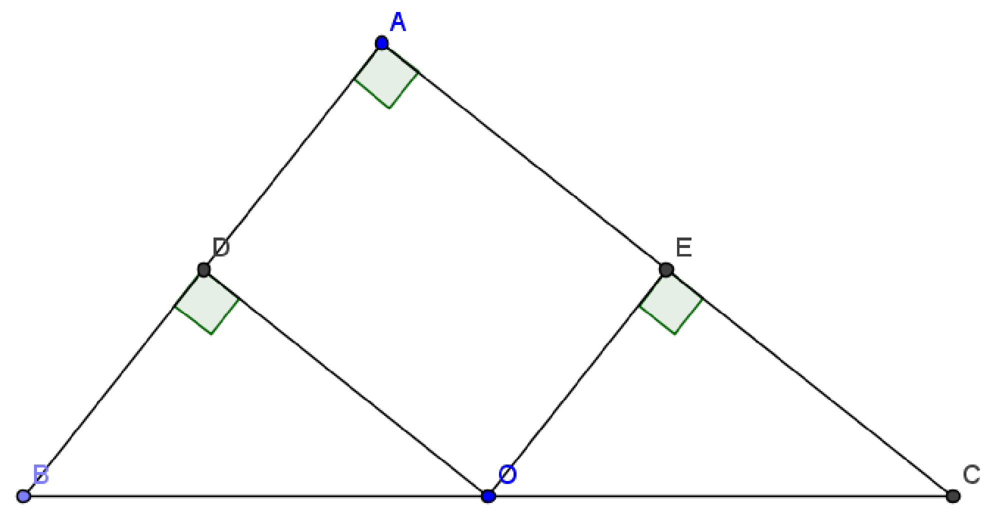
**14) (A)** Considerando o corte por $V$, $W$ e $Y$ , sendo $k$ a razão de semelhança entre a pirâmide maior e a menor, $h$ a altura da pirâmide menor e $d$ a diagonal de sua base, temos, por semelhança, que:

$$\frac{(k-1)h}{kh} = \frac{d}{\frac{kd}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow \frac{k-1}{k} = \frac{\sqrt{2}}{k} \Leftrightarrow k = \sqrt{2}+1.$$

**15) (A)** Temos 10 lâmpadas amarelas, 10 lâmpadas verdes, 10 lâmpadas vermelhas e 10 lâmpadas azuis. Dentre cada cor, devemos escolher as que ficarão acesas de modo que haja pelo menos uma lâmpada de cada cor acesa. Podemos fazer isso de $2^{10}-1$ maneiras para cada cor (número de subconjuntos não vazios) e, como temos quatro cores, o número de maneiras de acender o painel é $\left(2^{10}-1\right)^4$.

**16) (B)** Temos que $a+b=2012$, com $a$ e $b$ inteiros positivos. Queremos maximizar e minimizar $ab = 2012a - a^2$, cujo valor máximo é $1006^2$. Para encontrarmos o mínimo, basta ver que a função é decrescente à direita de 1006 e crescente à esquerda de 1006. Assim, o mínimo ocorre para $a=1$ ou $a=2011$, que nos dá como valor mínimo $2011 = 2\cdot 1006 - 1$. Assim, a diferença entre o maior e o menor valor é $1006^2 - 2\cdot 1006 + 1 = (1006-1)^2 = 1005^2$.

**17) (A)**




Na figura, $OD$ e $OE$ são mediatrizes dos lados $AB$ e $AC$, respectivamente. Para que o ponto $X$ esteja mais próximo de $A$, ele deve estar no retângulo $ADOE$, para que o ponto $X$ esteja mais próximo de *B*, ele deve estar no triângulo *DBO* e, finalmente, para que o ponto *X* esteja mais próximo de *C*, ele deve estar no triângulo *ECO*. Desta forma, teremos que $p_A = \frac{S_{ADOE}}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot 4}{\frac{6\cdot 8}{2}} = \frac{1}{2}$, $p_B = \frac{S_{DBO}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3\cdot 4}{2}}{\frac{6\cdot 8}{2}} = \frac{1}{4}$ e como devemos ter $p_A + p_B + p_C = 1$, $p_C = \frac{1}{4}$. Então, $p_A > p_B = p_C$.

**18) (A)** Digamos que as crianças receberam $a+1$, $a+b+2$, $a+b+c+3$, $a+b+c+d+4$ e $a+b+c+d+e+5$ balas, onde cada variável é inteira não-negativa. Devemos ter $5a+4b+3c+2d+e=6$. As possibilidades são $(1,0,0,0,1)$, $(0,1,0,1,0)$, $(0,1,0,0,2)$, $(0,0,2,0,0)$, $(0,0,1,0,3)$, $(0,0,1,1,1)$, $(0,0,0,1,4)$, $(0,0,0,2,2)$, $(0,0,0,3,0)$ e $(0,0,0,0,6)$, totalizando 10 modos.

Observação: Podemos chegar na equação $5a+4b+3c+2d+e=6$ diretamente usando o diagrama de Ferrers. Veja mais em http://mathworld.wolfram.com/FerrersDiagram.html.

**19) (B)** Considere os conjuntos $\{1,4,9,16,25\}$, $\{2,8,18\}$, $\{3,12\}$, $\{5,20\}$ e $\{6,24\}$. Diremos que um subconjunto satisfazendo as propriedades do enunciado é *supimpa.* Para que um subconjunto seja *supimpa*, ele só pode possuir no máximo um elemento de cada um dos conjuntos listados. Assim, um subconjunto *supimpa* possui no máximo $25-4-2-1-1-1=16$ elementos. Um exemplo de um subconjunto *supimpa* com 16 elementos é $\{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23\}$. Portanto, o número máximo de elementos de um subconjunto *supimpa* é de fato 16.

**20) (C)** Temos que

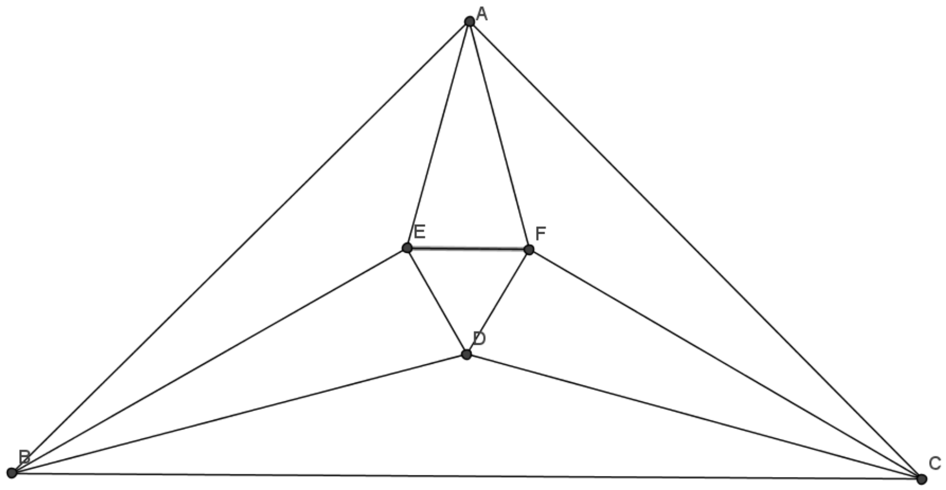
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = e + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} =$$

$$e + 2e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} = 3e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 3e + e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!} = 4e + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} = 5e$$

**21) (D)** Temos que

$2011^{2012}-1 = (2011^{1006}-1)(2011^{1006}+1) = (2011^{503}+1)(2011^{503}-1)(2011^{1006}+1)$. Temos que $2011 \equiv -1 (\text{mód}\, 4)$. Assim, $2011^{503}-1 \equiv (-1)^{503}-1 \equiv 2 (\text{mód}\, 4)$. Assim, a maior potência de 2 que divide $2011^{503}-1$ é 2. Também temos que $2011^{1006}+1 \equiv (-1)^{2006}+1 \equiv 2 (\text{mód}\, 4)$. Daí, a maior potência de 2 que divide $2011^{1006}+1$ também é 2. Finalmente, $2011 \equiv 3 (\text{mód}\, 8)$, o que nos dá que $2011^{503}+1 \equiv 3^{503}+1 \equiv 4 (\text{mód}\, 8)$, donde a maior potência de 2 que divide $(2011^{503}+1)(2011^{503}-1)(2011^{1006}+1)$ é $2\cdot 2\cdot 4 = 16$.

**22) (A)**




Pela simetria da figura, temos que $E\hat{D}B = F\hat{D}C$. Pelo Teorema de Morley, temos que $E\hat{D}F = 60°$. Além disso, $B\hat{D}C = 150°$, pois $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 15°$. Daí, teremos que $E\hat{D}B = 75°$, donde o triângulo *BED* é retângulo em *E*. A hipotenusa *BC* do triângulo *ABC* é igual a $2\sqrt{2}$. Traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles *BDC*, temos que $BD = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 15°}$ e no triângulo *BED*, temos que $ED = BD \cdot \operatorname{sen} 15°$ e daí $ED = \sqrt{2}\tan 15° = \sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

Observação: Usando a fórmula $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, temos que

$$\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

**23) (B)** Sejam $x, y, z, w$ as quantidades de 1's, 3's, 13's e 31's usados. Queremos minimizar $x+y+z+w$, dada a restrição de que $x+3y+13z+31w = 2012$ e que todas as variáveis são inteiras positivas. Se $x=1, y=2, z=4, w=63$, temos todas as restrições satisfeitas e $x+y+z+w=70$. Provaremos que esta é de fato a soma mínima.

Seja $x+y+z+w=k$. Primeiramente, note que $k$ é par, pois $x+3y+13z+31w=2012$. Suponha que $k \le 66$. Assim, como $x, y, z \ge 1$, temos que $w \le 63$. Como $x+3y+13z \le 13(x+y+z) = 13(k-w)$, temos que $2012 \le 13(k-w)+31w = 13k+18w \le 13\cdot 66 + 18\cdot 63 = 1992$, contradição. Assim, basta testarmos $k=68$. Neste caso, usando a estimativa anterior, chegamos a $13\cdot 68 + 18w \ge 2012$, donde $w \ge 63$. Mas temos que *w* é no máximo 64 e, portanto, temos dois casos a considerar:

1º caso: $w = 63$:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+3y+13z=59 \end{cases}$$

Aqui, temos que $x, y, z \leq 3 \Rightarrow x+3y+13z \leq 51$, contradição.

2º caso: $w = 64$:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+13z=28 \end{cases}$$

Aqui, só temos a solução inteira $x = 2, y = 0, z = 2$, o que não é permitido, pois as variáveis são todas positivas.

Desta forma, o valor mínimo para a soma é 70.

**24) (E)** Temos que $\begin{cases} xz+yz=\dfrac{1}{z} \\ xy+xz=\dfrac{1}{x} \\ yz+yx=\dfrac{1}{y} \end{cases}$.

Somando todas as equações, teremos que $2(xy+yz+zx)=\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}$. Assim, $xy+yz+zx=0$ ou $xyz=\dfrac{1}{2}$. Se $xy+yz+xz=0$, teremos que $xyz=-1$. Note que se ocorre $xy+yz+zx=0$ e $xyz=-1$, teremos que $zx+zy=-xy=\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow x+y=\dfrac{1}{z^2}$. Analogamente, obtemos todas as outras equações do sistema. Desta forma, basta que $xy+yz+zx=0$ e $xyz=-1$ para que o sistema seja satisfeito. Finalmente, mostraremos que existem infinitas triplas que satisfazem essas duas equações.

Tomando $x=\dfrac{-1}{yz}$, devemos ter $yz=\dfrac{y+z}{yz} \Leftrightarrow y^2z^2-y-z=0$. Para que esta equação tenha solução real, devemos ter seu discriminante, que é $1+4z^3$, não negativo. Tomando, portanto, $z \geq \dfrac{-1}{\sqrt[3]{4}}$, com $z$ não nulo, teremos $x$ e $y$ correspondentes e o sistema possui infinitas soluções.

**25) (B)** Denotaremos por $a_{ij}$ o número que está na interseção da $i$-ésima linha com a $j$-ésima coluna. Se $i \neq j$, temos que $a_{ij}a_{ji} = \text{mdc}(i,j)\text{mmc}(i,j) = ij$ e temos que $a_{ii} = i$. Assim, o produto de todos os números da tabela é $100!\left(\prod_{1\leq i<j\leq 100} ij\right) = 100!\cdot(100!)^{99} = (100!)^{100}$.