36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) C	6) A	11) D	16) A	21) D
2) A	7) A	12) E	17) B	22) E
3) A	8) E	13) B	18) E	23) A
4) C	9) C	14) D	19) E	24) B
5) A	10) B	15) A	20) B	25) C

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**

1) (C) Como $2014 = 53\cdot 19\cdot 2$, o número tem no máximo três fatores primos distintos. Para que o número seja mínimo, esses primos devem ser 2, 3 ou 5, sendo que primos menores têm expoentes maiores. O valor mínimo com um fator primo é 2^{2013}, o valor mínimo com dois fatores primos é um dos números $2^{52}3^{37}$, $2^{105}3^{18}$ ou $2^{1006}3^{1}$ e o valor mínimo com três fatores primos é $2^{52}3^{18}5^{1}$. Dentre os números apresentados, o menor é o último.

2) (A) Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagem é falsa. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, implicando nenhuma ou duas mensagens falsas.

3) (A) Observe que os itens possuem respectivamente: 4, 4, 6, 5, 4 letras. Assim, a única alternativa correta é "duas" com 4 letras, implicando que alternativas C e D contêm mais letras.

4) (C) Cada uma das diagonais EG e FH é formada por um lado do quadrado e duas alturas do triângulo equilátero, e tem portanto medida $1 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$. Sendo essas diagonais perpendiculares, a área do quadrilátero $EFGH$, que é um quadrado, é $\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

5) (A) Considere as estimativas:

$$2014^5 > 2000^5 = 32\cdot 10^{15}$$
$$3015^4 < 4000^4 = 64\cdot 10^{12}$$
$$4016^3 < 5000^3 = 125\cdot 10^{9}$$
$$5017^2 < 6000^2 = 36\cdot 10^{6}$$
$$6018^1 < 7000 = 7\cdot 10^{3}$$

O último número escrito na primeira linha possui mais dígitos que todos os outros escritos nas linhas subsequentes. Dessa forma, 2014^5 é o maior.

6) (A) A probabilidade de cada bola cair na urna de sua cor é $\frac{1}{3}$. Considerando 2014 bolas independentes, a probabilidade de todas entrarem na urna com sua cor é:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3^{2014}}.$$

7) (A) Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é $z=4$. Pelo critério de divisibilidade por 11, $(x+2+z)-(y+6)=x-y$ deve ser divisível por 11. Como x e y são dígitos, a única opção é $x=y$. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, $(x+y+2+6+z)=2x+12$ deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é $x=3$.

8) (E) Observe que:

$$1-\frac{F_k^2}{F_{k+1}^2}=\frac{F_{k+1}^2-F_k^2}{F_{k+1}^2}=\frac{(F_{k+1}-F_k)(F_{k+1}+F_k)}{F_{k+1}^2}=\frac{F_{k-1}F_{k+2}}{F_{k+1}^2}$$

Logo:

$$\left(1-\frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_3^2}{F_4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{F_4^2}{F_5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)=\frac{F_1F_4}{F_3^2}\cdot\frac{F_2F_5}{F_4^2}\cdot\frac{F_3F_6}{F_5^2}\ldots\frac{F_{2012}F_{2015}}{F_{2014}^2}$$

$$=\frac{F_1\cdot F_2\cdot F_{2015}}{F_3\cdot F_{2013}\cdot F_{2014}}=\frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$$

9) (C) Uma maneira de fazer aparecer 100 com 6 apertadas é fazer: $0+4\times5\times5$. Como a calculadora começa com 0, após as duas primeiras apertadas, teremos um número menor ou igual a 9. Com mais duas apertadas, o número resultante será menor ou igual a $9\times9=81$. Como não podemos apertar dois dígitos sem apertar uma operação, a quinta apertada será uma operação e não produzirá nenhum número maior que 81. Logo o mínimo é 6.

10) (B) Inicialmente, o calendário *gregoriano* impôs uma vantagem de 10 dias em relação ao calendário *juliano*. Além disso, de lá para cá, para cada um dos anos múltiplos de 100 que não são de 400, a saber: 1700, 1800 e 1900; o calendário gregoriano ganhou mais um dia de vantagem totalizando assim 13 dias. Como o mês de maio possui 31 dias nos dois calendários, estaríamos no dia 21 de maio de 2014.

11) (D) Dada uma escolha qualquer de três números no conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$, o triminó simplificado formado por eles é único. Existem $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ escolhas de três números distintos em tal conjunto. Para contarmos quantas escolhas possuem exatamente dois números repetidos, basta escolhermos dois números e, em seguida, escolhermos um deles para repertimos. Podemos fazer isso de $2\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=30$ formas. Claramente existem exatamente 6 triminós com os três números iguais. Portanto, o número procurado é $20+30+6=56$.

12) (E) Sejam p e q as raízes da segunda equação. Usando as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do segundo grau:

$$p+q=b,\ pq=a,\ p^2+q^2=a,\ p^2q^2=b$$

Daí, temos $3a=a+2a=(p^2+q^2)+2pq=(p+q)^2=b^2$ e $a^2=p^2q^2=b$, ou seja, $3a=b^2=(a^2)^2=a^4$. Como a é não nulo, devemos ter $a=\sqrt[3]{3}$.

13) (B) Como todo trapézio inscritível é isósceles e os triângulos mencionados também o são, temos as igualdades entre os arcos determinados pelas cordas seguintes:

$$AB=AC=BD=CE=DF=EG=FH=IG=IH$$

Esses 9 arcos iguais determinam arcos de $\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$. Portanto, o ângulo x mede $\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$.

14) (D) Seja x o número do centro e P o produto de cada linha, coluna ou diagonal.

a	b	c
d	x	e
f	g	h

Note que:

$$(a \cdot x \cdot h) \cdot (b \cdot x \cdot g) \cdot (c \cdot x \cdot f) = P^3$$

E, como $a \cdot b \cdot c = P$ e $f \cdot g \cdot h = P$, temos

$$x^3 = P$$

Daí,

$$a \cdot h = b \cdot g = c \cdot f = \frac{P}{x} = x^2,$$

de modo que x^2 deve possuir pelo menos 6 divisores positivos distintos. Para $x \leq 5$ temos no máximo 5 divisores. Veja que $x = 6$ satisfaz a propriedade com o seguinte exemplo:

2	36	3
9	**6**	4
12	1	18

15) (A) Manipulando a equação temos:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 5x + 6 + 2x^2 + 8x + 6 + 3x^2 + 9x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 11x - 12 = 0$$

A soma das raízes é menos o coeficiente de x^2, que é 0.

16) (A) Como P está na bissetriz, ele possui igual distância r aos lados AB e AC. Assim,

$$\frac{6}{5} = \frac{6r/2}{5r/2} = \frac{S(ABP)}{S(APC)} = \frac{3/2}{S(APC)} \Rightarrow S(APC) = \frac{5}{4}$$

17) (B) Existem 4 tipos possíveis de colunas e as regras do Super Paciência se resumem a não preenchermos uma certa coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez que Bitonho escolheu os números de uma coluna, ele possui 3 opções de preenchimento para a próxima. No início, podemos escolher livremente como preencher a primeira coluna. O total de preenchimentos é $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 4 \cdot 3^{2013}$.

18) (E) Como $2014 = 53 \cdot 19 \cdot 2$ segue que $a^2 + b^2$ é um de seus 8 divisores. Os possíveis restos de um quadrado perfeito na divisão por 19 são: $0,1,4,5,6,7,9,11,16$. A única soma de dois deles que produz um múltiplo de 19 é a soma $0+0$. Assim, se $a^2 + b^2$ é múltiplo de 19, a e b também o são. Dado que 2014 não possui dois fatores de tal primo, podemos concluir que $a^2 + b^2$ deve ser um divisor de $53 \cdot 2$. As possíbilidades são:

$$a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow (a, b) = (1,1)$$
$$a^2 + b^2 = 53 \Rightarrow (a, b) = (7,2); (2,7)$$
$$a^2 + b^2 = 106 \Rightarrow (a, b) = (5,9); (9,5)$$

19) (E) Vamos considerar apenas o resto dos números na divisão por 10, pois estamos interessados apenas no dígito das unidades.
Cada número depende dos dois anteriores, então para buscar um padrão, basta verificar quando dois números consecutivos aparecerem novamente na sequência. Vejamos:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	**2**	6	4	4	2	8	8	4	6	6	8	**2**	**2**

Como repetiram dois valores consecutivos (2,2) a sequência dos dígitos das unidades é periódica de período 12. Observe que a cada 12 consecutivos obtemos:

$$2-2+6-4+4-2+8-8+4-6+6-8=0$$

Note que 2014 deixa resto 10 na divisão por 12, logo:

$$x_0-x_1+x_2-\cdots-x_{2013}+x_{2014}\equiv 2-2+6-4+4-2+8-8+4-6+6=$$
$$=6-2+4=8 \pmod{10}$$

e o dígito das unidades é 8.

20) (B) Somando as equações e agrupando as variáveis temos:

$$x^2-8x+y^2-8y+z^2-8z+45=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=3$$

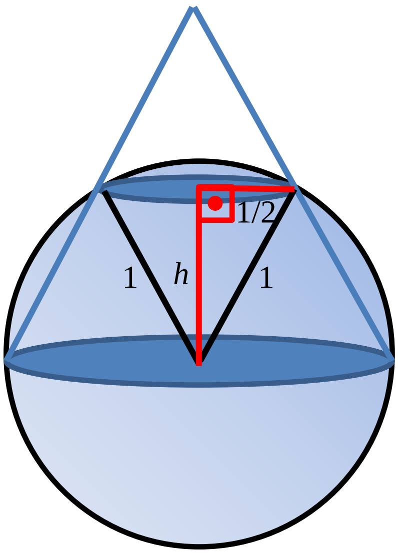
A soma dos quadrados de três inteiros só é 3 se cada quadrado for 1, logo temos para cada variável:

$$|x-4|=1 \Rightarrow x=3 \text{ ou } x=5$$

Como são três variáveis, note que duas delas terão necessariamente o mesmo valor. Veja, por exemplo, $y=z=3 \Rightarrow x=3$ e $y=z=5 \Rightarrow x=5$. Logo as únicas soluções são:

$$(x,y,z)=(3,3,3);(5,5,5)$$

21) (D) A interseção do cone com a esfera é uma circunferência. O cone menor com base nessa circunferência e mesmo vértice que o outro cone é semelhante ao cone original, com razão de semelhança igual à razão entre suas geratrizes, que é 1/2. Assim, sua base tem raio 1/2.

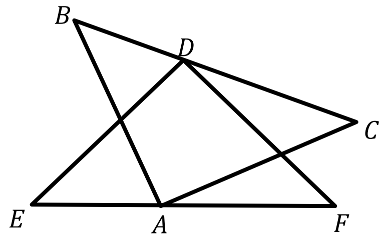


A altura do cone é igual ao dobro de h, que é igual a $h=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, a altura é $2h=\sqrt{3}$.

22) (E) Sejam $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ as frações íntimas de $\frac{2014}{51}$ com $y,w<51$. Temos $2014y-51x=\pm1$. Vendo módulo 51, temos $25y\equiv\pm1 \pmod{51} \Leftrightarrow 25y\equiv\mp50 \pmod{51} \Leftrightarrow y\equiv\mp2 \pmod{51}$. Como $y<51$, temos $y=2$ (que dá $x=79$) ou $y=49$ (que dá $x=1935$). Logo as frações íntimas desejadas são $\frac{79}{2}$ e $\frac{1935}{49}$, que nos dá $yw=98$.

23) (A) Sendo a vazão de água constante, o caminhão carregou, em média, o correspondente a $\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ de água. O consumo carregando essa quantidade de água corresponde a $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de tanque de gasolina. Assim, para carregar o caminhão cheio de água é necessário $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$ de tanque de gasolina.

24) (B) Como $\angle DCA = \angle EFA = 45°$, o quadrilátero $AFCD$ é inscritível. Sendo $DF = AC$ e DC e AF não paralelos, $\angle ADC = \angle DAF$. Como o ângulo entre as retas BC e EF é $30°$, $\angle ADC = \angle DAF = 75°$.



Enfim, pela lei dos senos no triângulo ADC, $\frac{AC}{\text{sen}\,75°} = \frac{AD}{\text{sen}\,45°} \Leftrightarrow AD = \frac{\frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.

25) (C) Uma moeda retangular de lados 3 e 4 pode ser inscrita em um círculo de diâmetro 5. Se o centro desse círculo cair no retângulo de lados $10 - 5 = 5$ e $20 - 5 = 15$ (tiramos "bordas" de tamanho igual ao raio), a moeda cai totalmente no ladrilho.

Mas a moeda pode cair totalmente dentro do ladrilho, dependendo de sua posição em relação ao ladrilho. Se a moeda cai totalmente dentro no ladrilho, seu centro está em um retângulo de lados $10 - 3 = 7$ e $20 - 3 = 17$.

Assim, a probabilidade de a moeda cair totalmente dentro do ladrilho está entre $\frac{5 \cdot 15}{10 \cdot 20} = 0{,}375$ e $\frac{7 \cdot 17}{10 \cdot 20} = 0{,}595$.

Observação: pode-se provar que a probabilidade exata é $1{,}06 - \frac{197{,}5}{100\pi} \approx 0{,}4313$.