XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

a) Determine o maior valor possível de $\left|sen^2(x)\cdot sen(2x)\right|$ para $x\in\mathbb{R}$.

b) Prove que para todo inteiro positivo *k*, se $x=\dfrac{2\pi r}{2^k-1}$, com $r\in\mathbb{Z}$, então $\left|\prod_{j=0}^{k-1} sen\left(2^j x\right)\right| = \left|sen(x)\cdot sen(2x)\cdot\ldots\cdot sen\left(2^{k-1}x\right)\right| \le \left(\sqrt{3}/2\right)^k.$

PROBLEMA 2

Considere a função dada por $f(x)=\left(e^x-1\right)^{1/x}$, definida para $x>0$.

a) Mostre que $f(x)$ é estritamente crescente.

b) Seja $V(y)$ definida por $V(y)=x$ se e somente se $f(x)=y$. Dados $0<a<b<c$, números reais, considere a equação $a^x+b^x=c^x$. Escreva *x* em função de *a*, *b* e *c* usando funções elementares e a função *V*.

PROBLEMA 3

Sejam $f(x)$ e $g(x)\in\mathbb{R}[x]$ não constantes e *m*, *n* inteiros positivos. Mostre que $y^m-f(x)$ divide $y^n-g(x)$ em $\mathbb{R}[x,y]$ se, e somente se, *m* divide *n* e $g(x)=f(x)^{n/m}$.

PROBLEMA 4

Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas por $x_1=2, y_1=2012,\ x_{n+1}=2^{x_n}$ e $y_{n+1}=(y_n)!$, para todo $n\ge 1$. Determine o menor inteiro positivo *k* tal que $x_k>y_{2012}$.

PROBLEMA 5

Sejam $M_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. Para cada uma das matrizes M_i (i = 1, 2, 3), determine quantas matrizes A_i existem com $A_i^5=M_i$.

PROBLEMA 6

Considere a parábola formada pelos pontos $\left(x,x^2\right), x\in\mathbb{R}$ e a sequência $\left(x_n\right)_{n\ge 0}$ dada por $x_n=n^{\alpha}$, onde $\alpha>0$ é uma constante real. Considere a região formada pelos pontos que estão à direita do eixo vertical $(x=0)$, abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola nos pontos $\left(x_n,x_n^2\right), n\ge 0$. Para que valores de α essa região tem área infinita?