XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática
Primeira Fase – Nível Universitário

(Cada problema vale 10 pontos)

Problema 1
Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros satisfazendo $P(n) = n$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$ e $|P(0)| \leq 2013$. Determine quantos e quais são os possíveis valores de $P(0)$.

Problema 2
Encontre o valor mínimo de

$$\sqrt{\tan^8 x - 4\tan^4 x + \tan^2 x - 2\tan x + 5} + \sqrt{\tan^8 x - 6\tan^4 x + \tan^2 x - 4\tan x + 13}$$

para $x \in (0, \pi/2)$.

Problema 3
Considere a parábola de equação $y = x^2/4$. Encontre o raio da circunferência que é tangente a esta parábola e ao eixo y no foco $(0, 1)$ da parábola.

Problema 4
Seja

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

o círculo de raio 1 e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{5x + 3y}{4}, \frac{3x + 5y}{4}\right) \end{aligned}$$

Encontre todos os valores de n natural para os quais $T^n(C)$, a imagem de C após n aplicações de T, contenha pelo menos 2013 pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

Problema 5
Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade $1/2$ para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

Problema 6
Seja

$$P = \{a^b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a, b > 1\} = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, \ldots\}$$

o conjunto das *potências perfeitas*. Prove que a soma infinita

$$\sum_{m \in P} \frac{1}{m - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots$$

é igual a 1.