36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário — Primeira Fase

Problema 1 Turbo, o caracol, está participando de uma corrida. Nos últimos 1000 mm, Turbo, que está a 1 mm por hora, se motiva e passa a correr de modo que sua velocidade seja inversamente proporcional à distância que falta. Em quanto tempo Turbo percorre esses 1000 mm finais ?
Obs.: Suponha que Turbo pode atingir velocidades arbitrariamente altas, mesmo que sejam maiores que a da luz.

Problema 2 Considere as matrizes 3×3 cujas entradas são inteiros entre 0 e 9 (inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.

Problema 3 Determine todos os pares de inteiros positivos (n, r) para os quais pode existir uma festa com n participantes em que cada participante conhece exatamente r outros participantes.
Obs.: Conhecer é uma relação simétrica.

Problema 4 Seja D_n o conjunto dos racionais p/q com p, q inteiros, $0 < q \leq n$ e $0 \leq p \leq q$.

a) Prove que, para todo $n \geq 3$, dados $x, y \in D_n$ distintos, temos sempre

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| > \pi^2/n^3.$$

b) Prove que para todo $c > \pi^2$ e todo n_0 natural existem $n > n_0$ e $x, y \in D_n$ distintos tais que

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| < c/n^3.$$

Problema 5 Sejam $t_1, t_2, ..., t_n$ reais positivos tais que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 2\pi$ e O um ponto fixo do plano. Considere a família de polígonos convexos de n lados contendo O em seu interior cujos ângulos externos sejam respectivamente $t_1, t_2, ..., t_n$. Sejam y_i o comprimento do i-ésimo lado, e x_i a distância de O ao i-ésimo lado.

a) Mostre que o vetor $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ depende linearmente do vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, isto é, existe uma matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ que só depende dos $t_i, 1 \leq i \leq n$ tal que $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, para $1 \leq i \leq n$.

b) Considere um segundo polígono desta mesma familia, e defina x'_i e y'_i de maneira análoga. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i$.

Problema 6 Zé Pantera percorre um caminho em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ guiado por um dado. Começa em 0 e a cada segundo joga um dado honesto, obtendo um número s entre 1 e 6; se está em x pula para $x + s$. Seja x_n a probabilidade de Zé Pantera estar em n em algum momento. Prove que existe $\lim_{n \to \infty} x_n$ e determine esse limite.