Problema 1

Solução

(a) (3 pontos) Sendo $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(2x)$, uma função π-periódica, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}^2(x)\cdot 2\cos(2x) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cdot\big(\cos(x)\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(x)\cos(2x)\big) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

e assim, $f'(x) = 0 \iff x = \pi r/3,\ r \in \mathbb{Z}$. Substituindo estes valores, concluímos que $|f(x)|$ é no máximo $|f(\pi/3)| = |f(2\pi/3)| = (\sqrt{3}/2)^3$.

(b) (7 pontos) Pelo item anterior, temos as k desigualdades

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(2x)| &\le (\sqrt{3}/2)^3 \\ |\operatorname{sen}^2(2x)\operatorname{sen}(4x)| &\le (\sqrt{3}/2)^3 \\ &\cdots \\ |\operatorname{sen}^2(2^{k-1}x)\operatorname{sen}(2^k x)| &\le (\sqrt{3}/2)^3 \end{aligned}$$

Note que como $2^k x = 2\pi r\cdot 2^k/(2^k-1) = x + 2\pi r$ temos $\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}(x)$. Assim, multiplicando as desigualdes acima obtemos

$$|\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}^3(2x)\cdots\operatorname{sen}^3(2^{k-1}x)| \le (\sqrt{3}/2)^{3k}$$

e portanto

$$|\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)\cdots\operatorname{sen}(2^{k-1}x)| \le (\sqrt{3}/2)^{k}$$

Critério de Correção:

(i) Calcular $f'(x)$: 1 ponto.

(ii) Encontrar as raízes de $f'(x) = 0$ e o máximo de $|f(x)|$: +2 pontos.

(iii) Escrever as k desigualdades acima: +2 pontos.

(iv) Multiplicar as k desigualdades acima: +3 pontos.

(v) Perceber $\operatorname{sen}(2^k x) = \operatorname{sen}(x)$ e concluir o problema: +2 pontos.

Problema 2

Solução

(a) (3 pontos) Note que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Assim, seja

$$g(x) = \ln(f(x)) = \frac{\ln(e^x - 1)}{x}$$

Como $\ln(x)$ é uma função estritamente crescente, basta mostrar que $g(x)$ é estritamente crescente. Mas

$$g'(x) = \frac{\ln(e^x - 1) - e^x \ln(e^x - 1) + xe^x}{x^2 (e^x - 1)}$$

Como o denominador é claramente positivo para $x > 0$, basta mostrar que o numerador $N(x)$ é positivo. Mas, se $e^x - 1 \geq 1$

$$N(x) = \underbrace{\ln(e^x - 1)}_{\geq 0} + e^x \underbrace{(x - \ln(e^x - 1))}_{>0} > 0$$

Por outro lado, se $e^x - 1 < 1$, então

$$N(x) = \underbrace{\ln(e^x - 1)}_{<0} \underbrace{(1 - e^x)}_{<0} + \underbrace{xe^x}_{>0} > 0$$

(b) (7 pontos) Note que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e \cdot \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)^{1/x} = e \cdot 1^0 = e$$

Como f é crescente, sua imagem é $(0, e)$, que será o domínio de $V(y)$.

Em $a^x + b^x = c^x$, não poderíamos ter $x \leq 0$. De fato, como $0 < a < b < c$, isto implicaria em $a^x \geq c^x$, e $a^x + b^x > c^x$. Então $x > 0$.

Agora divida tudo por b^x

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^x$$

Sendo $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\gamma = \frac{c}{b}$, o problema passa a ser

$$\alpha^x + 1 = \gamma^x \Leftrightarrow \alpha = (\gamma^x - 1)^{1/x} \Leftrightarrow \alpha = \left(e^{x \ln \gamma} - 1\right)^{1/x}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x \ln \gamma = z$ (note que $\gamma > 1$, então $z > 0$)

$$\alpha = (e^z - 1)^{\ln \gamma / z} \Leftrightarrow f(z) = \alpha^{1/\ln \gamma}$$

Como $0 < \alpha < 1$ e $\ln \gamma > 0$, temos $0 < \alpha^{1/\ln \gamma} < 1$, ou seja, $\alpha^{1/\ln \gamma}$ está no domínio de V. Assim, a única solução é

$$\begin{aligned} z &= V\left(\alpha^{1/\ln \gamma}\right) \Leftrightarrow x \ln \gamma = V\left(\alpha^{1/\ln \gamma}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{V\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(\ln c - \ln b)}\right)}{\ln c - \ln b} \end{aligned}$$

Critério de Correção:

(i) Calcular $f'(x)$ (ou um análogo relevante, como $g'(x)$ acima) corretamente: 1 ponto.

(ii) Completar o item (a): +2 pontos.

(iii) Dividir por b^x ou diminuir o número de constantes do problema de alguma maneira análoga: +1 ponto.

(iv) Provar que $x > 0$: +1 ponto.

(v) Chegar ao formato $\alpha = (\gamma^x - 1)^{1/x}$: +1 ponto

(vi) Chegar a $f(z) = \alpha^{1/\ln\gamma}$ ou a uma equação do tipo $f(z) = h(a, b, c)$ onde z é uma função de x com inversa elementar: +2 pontos

(vii) Provar que $h(a, b, c)$ está na imagem de f (isto é, no domínio de V): +1 ponto.

(viii) Expressão final para x: +1 ponto.

Problema 3

Solução Escrevendo $n = qm + r$, com $0 \leq r < m$, e

$$y^n - g(x) = y^r(y^{qm} - f(x)^q) + f(x)^q y^r - g(x),$$

usando o fato de que $y^{qm} - f(x)^q$ é divisível por $y^m - f(x)$, concluímos que, se $y^n - g(x)$ é divisível por $y^m - f(x)$, $f(x)^q.y^r - g(x)$ também é. Como o grau em y de $f(x)^q y^r - g(x)$, que é r, é menor que m, que é o grau em y de $y^m - f(x)$, devemos ter $f(x)^q y^r - g(x)$ identicamente nulo, ou seja, $r = 0$ e $g(x) = f(x)^q = f(x)^{n/m}$.

Critério de Correção:

(i) Considerar a divisão com resto de n por m: 1 ponto.

(ii) Observar que $y^{qm} - f(x)^q$ é divisível por $y^m - f(x)$ para todo q: +2 pontos.

(iii) Concluir corretamente a divisão com resto de $y^n - g(x)$ por $y^m - f(x)$, como polinômios em y: +3 pontos.

(iv) Completar a solução: +4 pontos.

Problema 4

Solução Temos $x_2 = 2^2 = 4, x_3 = 2^4 = 16 < 2012$ (e logo segue facilmente por indução que $x_{n+2} < y_n$ para todo $n \geq 1$), $x_4 = 2^{16} = 65536 > 22 \cdot 2012$, donde $x_5 = 2^{65536} > ((2^{11})^{2012})^2 > (2012^{2012})^2 > (2012!)^2 = y_2^2$. A partir daí vamos provar por indução que $x_{n+3} > y_n^2 > y_n$ para todo $n \geq 2$. De fato, $x_{n+4} = 2^{x_{n+3}} > 2^{y_n^2} = (2^{y_n})^{y_n} > (y_n^2)^{y_n} = (y_n^{y_n})^2 > (y_n)!^2 = y_{n+1}^2$. Assim, a resposta é 2015.

Critério de Correção:

(i) Mostrar que que $x_{n+2} < y_n$ para todo $n \geq 1$, e logo a resposta é maior que 2014: 2 pontos.

(ii) Conjecturar, com base em estimativas dos primeiros valores de x_n e y_n, que a reposta é 2015: +2 pontos.

(iii) Conjecturar uma desigualdade mais forte que $x_{n+3} > y_n$ (por exemplo $x_{n+3} > y_n^2 > y_n$, para n suficientemente grande), que seja correta e possa ser provada diretamente por indução: +3 pontos.

(iv) Completar a solução: +3 pontos.

Problema 5

Solução O enunciado não especifica se as matrizes A_i são reais ou complexas; consideraremos os dois casos.

A matriz M_1 pode ser diagonalizada por

$$M_1 = X_1 D_1 X_1^{-1}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim queremos encontrar B_1 com $B_1^5 = D_1$ para fazermos $A_1 = X_1 B_1 X_1^{-1}$ (note que A_i é real se e somente se B_i é real).

Note que B_1 deve ser diagonal. Assim existe uma única B_1 real e existem 25 tais matrizes complexas:

$$\begin{pmatrix} \zeta^{e_1}\sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & \zeta^{e_2} \end{pmatrix}, \quad \zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), \quad e_1, e_2 \in \{0,1,2,3,4\}.$$

A matriz

$$M_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem um único autovalor ($\lambda = 2$) com multiplicidade geométrica um e multiplicidade algébrica dois. Assim A_2 também deve ter um único autovalor com multiplicidade geométrica um e multiplicidade algébrica dois.

No caso real temos uma única matriz A_2; no caso complexo temos cinco:

$$A_2 = \zeta^e \sqrt[5]{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Para a matriz $M_3 = 2I$ já no caso real existem infinitas matrizes A_3 (e portanto também infinitas no caso complexo). De fato, seja

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}.$$

Seja Z uma matriz inversível qualquer. Tome

$$A_3 = \sqrt[5]{2} Z R Z^{-1}.$$

Uma conta verifica diretamente que $A_3^5 = M_3$. Para ver que temos infinitas matrizes distintas basta observar que se

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad c > 0$$

então valores diferentes de c obtem valores diferentes de $A_3 e_1$ e portanto de A_3.

Critério de Correção:

A resolução correta do problema para uma das três matrizes (seja no caso real, no caso complexo ou nos dois) vale 3 pontos; para duas matrizes vale 6 pontos.

Uma solução correta e completa para o caso real (sem discutir o caso complexo) ou para o caso complexo (sem contar matrizes reais) vale 9 pontos.

Problema 6

Solução

Para cada n natural encontraremos a área abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola pelos pontos (x_n, x_n^2) e (x_{n+1}, x_{n+1}^2) para depois somá-las e concluir.

Passo 1. Equações da retas tangentes (+1 ponto) A derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$, de modo que a equação da reta tangente à esta parábola pelo ponto (x_n, y_n) (aqui denotamos $y_n = x_n^2$) é

$$\frac{y - y_n}{x - x_n} = 2x_n.$$

Passo 2. Interseção das retas tangentes (+2 pontos) Seja t_n a reta tangente à parábola pelo ponto (x_n, y_n). Suponha que t_n e t_{n+1} se encontram no ponto (a_n, b_n). Devemos ter portanto

$$\frac{b_n - y_n}{a_n - x_n} = 2x_n \quad \text{e} \quad \frac{b_n - y_{n+1}}{a_n - x_{n+1}} = 2x_{n+1},$$

e resolvendo este sistema encontramos (lembre-se que $y_n = x_n^2$)

$$a_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad \text{e} \quad b_n = x_n x_{n+1}.$$

Passo 3. Cálculo das parcelas da área (+3 pontos) Agora calculamos a área abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola pelos pontos (x_n, x_n^2) e (x_{n+1}, x_{n+1}^2).

I) A área abaixo da parábola de x_n a x_{n+1} é

$$(I) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x^2\, dx = \frac{1}{3}\big(x_{n+1}^3 - x_n^3\big).$$

(II) A área abaixo da reta t_n de x_n à a_n é (observe por exemplo que este é um trapézio)

$$(II) = \frac{1}{2}(y_n + b_n)(a_n - x_n) = \frac{1}{4}(x_n^2 + x_n x_{n+1})(x_{n+1} - x_n).$$

III) A área abaixo da reta t_{n+1} de a_n à x_{n+1} é

$$(III) = \frac{1}{2}(b_n + y_{n+1})(x_{n+1} - a_n) = \frac{1}{4}(x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2)(x_{n+1} - x_n).$$

Portanto, nossa área buscada é

$$(I) - (II) - (III) = \frac{(x_{n+1} - x_n)^3}{12}.$$

Passo 4. Conclusão (+4 pontos) No caso $x_n = n^\alpha$ a área total buscada é portanto

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((n+1)^\alpha - n^\alpha)^3}{12}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio sabemos que

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha(n^*)^{\alpha-1}$$

para algum $n^* \in [n, n+1]$, e temos portanto a soma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(n^*)^{\alpha-1})^3}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^3}{12}(n^*)^{3(\alpha-1)}.$$

Como $n^* \in [n, n+1]$ esta última soma diverge se e somente se $3(\alpha - 1) \geq -1$, ou seja, se $\alpha \geq 2/3$.