XXXV Olimpíada Brasileira de Matemática
Primeira Fase – Nível Universitário

(Cada problema vale 10 pontos)

Problema 1
$P(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros tal que $P(n) = n$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$ e $|P(0)| \leq 2013$. Determine quantos e quais são os possíveis valores de $P(0)$.
Solução:

[3 pontos] Faça $Q(x) = P(x) - x$. Então $Q(n) = 0$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$.

[3 pontos] Assim, $Q(x)$ (que também só tem coeficientes inteiros) pode ser fatorado como

$$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)R(x)$$

onde $R(x)$ tem coeficientes inteiros.

[3 pontos] Portanto, $Q(0) = P(0) = 6!R(0) = 720R(0)$ será um múltiplo de 720, então $P(0)$ tem de ser ± 1440, ± 720 ou 0 (pois $3 \cdot 720 = 2160 > 2013$).

[1 pontos] Enfim, os polinômios da forma

$$P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + x$$

com $k = \pm 2, \pm 1$ ou 0 satsfazem o enunciado e fazem $P(0)$ ser cada um dos cinco valores citados. Assim, a resposta é $\{\pm 1440, \pm 720, 0\}$.

Observação: Exibir algumas possibilidades para $P(x)$, e portanto algumas possibilidades para $P(0)$ (por exemplo, $P(x) = x$ que dá $P(0) = 0$): [1 ponto].

Problema 2
Encontre o valor mínimo de

$$\sqrt{\tan^8 x - 4\tan^4 x + \tan^2 x - 2\tan x + 5} + \sqrt{\tan^8 x - 6\tan^4 x + \tan^2 x - 4\tan x + 13}$$

para $x \in (0, \pi/2)$.
Solução:

[4 pontos] Seja $t = \tan x$. Como $x \in (0, \pi/2)$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. Assim queremos o mínimo, para $t \in \mathbb{R}_+^*$, de

$$f(t) = \sqrt{t^8 - 4t^4 + t^2 - 2t + 5} + \sqrt{t^8 - 6t^4 + t^2 - 4t + 13} = \sqrt{(t^4-2)^2 + (t-1)^2} + \sqrt{(t^4-3)^2 + (t-2)^2}$$

[3 pontos] Sejam $A = (2,1)$, $B = (3,2)$ e $T = (t^4, t)$. Note que $f(t) = AT + TB \geq AB = \sqrt{2}$, pela desigualdade triangular. A igualdade pode ocorrer se existe T no interior do segmento AB, ou seja, $1 \leq t \leq 2$ e

$$\frac{t-1}{t^4-2} = \frac{2-1}{3-2} \iff t^4 - 2 = t - 1 \iff t^4 - t - 1 = 0$$

[3 pontos] Sendo $P(t) = t^4 - t - 1$, $P(1) = -1 < 0$ e $P(2) > 0$, logo existe um valor de t no intervalo $[1, 2]$, de modo que as igualdades $P(t) = 0$ e $f(t) = AT + TB = AB = \sqrt{2}$ ocorrem.

Problema 3
Seja

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

o círculo de raio 1 e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{5x+3y}{4}, \frac{3x+5y}{4}\right) \end{aligned}$$

Encontre todos os valores de n natural para os quais $T^n(C)$ contenha pelo menos 2013 pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.
Solução:

Os auto-valores da matriz $\begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$ da transformação linear T na base canônica são 2 e $1/2$, com auto-vetores correspondentes $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ (por exemplo). Assim, aplicar T corresponde a expandir por 2 na direção da bissetriz dos quadrantes ímpares e contrair por 2 na direção da bissetriz dos quadrantes pares. Logo a imagem do círculo C de raio 1 centrado na origem por T^n é limitada por uma elipse centrada na origem com eixos sobre estas bissetrizes e semi-eixos de tamanhos $1/2^n$ e 2^n.

Assim, temos que $T^n(C)$ contém pelo menos os pontos de coordenadas inteiras (z, z) para $|z| \leq 2^n/\sqrt{2}$. Para $n \geq 11$, temos pelo menos $2 \cdot \lfloor 2^{11}/\sqrt{2} \rfloor + 1 = 2897$ tais pontos e portanto todo $n \geq 11$ é solução. Claramente $n = 1$ não é solução e para $n = 2, 3, 4, \ldots, 10$, $T^n(C)$ está contido na região limitada por $|x| \leq 2^{10} \cos 45° + 1 < 726$ e pelas retas de equações $y = x \pm \sqrt{2}/2$. Assim, se (x, y) está nesta região e tem coordenadas inteiras, então $x = y$ e assim temos menos de $2 \cdot 726 + 1 < 2013$ tais pontos. Portanto a resposta é $n \geq 11$.

Critério:

- diagonalizar a matriz de T/encontrar seus auto-valores e auto-vetores: 3 pontos
- descrever a imagem de C por T: +4 pontos
- mostrar que todo $n \geq 11$ é solução: +2 pontos
- mostrar que $n = 1, 2, \ldots, 10$ não é solução: +1 ponto.

Problema 4
Considere a parábola de equação $y = x^2/4$. Encontre o raio da circunferência que é tangente a esta parábola e ao eixo y no foco $(0, 1)$ da parábola.
Solução:

[2 pontos] Suponha sem perda de generalidade que o centro da circunferência esteja do lado direito do eixo y. Sejam r e $C = (r, 1)$ o raio e o centro da circunferência, de modo que sua equação é $(x - r)^2 + (y - 1)^2 = r^2 \iff x^2 - 2rx + (y - 1)^2 = 0$. As interseções entre a circunferência e a parábola são as soluções do sistema

$$\left| \begin{array}{c} x^2 - 2rx + (y-1)^2 = 0 \\ y = x^2/4 \end{array} \right. .$$

[3 pontos] Como a parábola e a circunferência são tangentes, a equação

$$x^2 - 2rx + (x^2/4 - 1)^2 = 0$$

tem raiz dupla m em x.

[3 pontos] Sendo $f(x) = x^2 - 2rx + (x^2/4 - 1)^2$, $f'(x) = 2x - 2r + 2(x^2/4 - 1) \cdot 2x/4 = x^3/4 + x - 2r$. Temos

$$f(m) = f'(m) = 0 \iff \left| \begin{array}{c} m^2 - 2rm + (m^2/4 - 1)^2 = 0 \\ m^3/4 + m - 2r = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{c} m(m - 2r) + (m^2/4 - 1)^2 = 0 \\ m - 2r = -m^3/4 \end{array} \right.$$

$$\implies m(-m^3/4) + (m^2/4 - 1)^2 = 0 \iff (m^2/4 - 1)^2 - (m^2/2)^2 = 0$$

$$\iff (m^2/4 - 1 - m^2/2)(m^2/4 - 1 + m^2/2) = 0 \iff 3m^2/4 = 1 \iff m = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

[2 pontos] Temos, então, $2r = m + m^3/4 = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{8}{4 \cdot 3\sqrt{3}}\right)$. Como $r > 0$,

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Problema 5

Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade $1/2$ para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

Solução:

[4 pontos] Pinte os vértices do quadrado alternadamente de branco e preto. A cada segundo, cada feijão pula de um quadrado de uma cor para outro de outra cor. Assim podemos considerar independentemente dois pares de feijões: os que começam em vértices brancos e os que começam em vértices pretos. Para cada par, seja $p(n)$ a probabilidade de que depois de n segundo os dois feijões do par estejam em vértices distintos. Assim a resposta do problema é igual a $(p(2013))^2$.

[4 pontos] Afirmamos que $p(n) = 1/2$ para $n > 0$. De fato, considere a posição dos feijões depois de $(n-1)$ segundos. Suponha para fins de argumentação que um pule primeiro e o outro depois. Quando o segundo for pular, ele tem dois lugares para onde ir, igualmente prováveis: a casa já ocupada pelo primeiro feijão e uma casa vazia. Assim, a probabilidade de que ele pule para uma casa vazia é igual a $1/2$, como queríamos.

[2 pontos] Concluindo: a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice é igual a $1/4$.

Observações:

A conclusão final acima vale 2 pontos para indicar que as observações de um dos dois parágrafos anteriores (se não acompanhadas de outras conclusões) valem apenas 4 pontos, e não 5 pontos.
É natural mas não é estritamente necessário separar os feijões em dois pares, como no primeiro parágrafo. Uma solução correta e completa que não separe os feijões em dois pares vale, é claro, 10 pontos.
A resposta correta ($1/4$) dada sem nenhuma justificativa vale 0 pontos.

Problema 6

Seja

$$P = \{a^b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a, b > 1\} = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, \ldots\}$$

o conjunto das *potências perfeitas*. Prove que a soma infinita

$$\sum_{m \in P} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots$$

é igual a 1.

Solução:

[3 pontos] Primeiro, note que

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1/m}{1 - 1/m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{m^k}.$$

Deste modo, queremos calcular a soma

$$S = \sum_{m \in P} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{m^k}.$$

[4 pontos] Aos pares (m, k), com $m \in P$ e $k \geq 1$, podemos associar bijetivamente os pares (n, t), com $n, t \geq 2$, de forma que, se (n, t) é associado a (m, k) então $n^t = m^k$. Para isso, note que todo elemento de P pode ser escrito de forma única como $m = \tilde{a}^r$, onde $\tilde{a} \geq 2$ não pertence a P e $r \geq 2$. Assim, associamos $(\tilde{a}^k, r)$ a (m, k) para quaisquer $m \in P$ e $k \geq 1$.

[3 pontos] Com isso,

$$S = \sum_{n,t \geq 2} \frac{1}{n^t} = \sum_{n \geq 2} \frac{1/n^2}{1 - 1/n} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1.$$