36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário — Primeira Fase

Problema 1 Turbo, o caracol, está participando de uma corrida. Nos últimos 1000 mm, Turbo, que está a 1 mm por hora, se motiva e passa a correr de modo que sua velocidade seja inversamente proporcional à distância que falta. Em quanto tempo Turbo percorre esses 1000 mm finais ?
Obs.: Suponha que Turbo pode atingir velocidades arbitrariamente altas, mesmo que sejam maiores que a da luz.
Solução. Seja $x(t)$ a distância que falta para Turbo terminar a corrida no instante t. Então $x(0) = 1000$, a velocidade de Turbo é $1000/x$ e obtemos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1000}{x} \implies x\,dx = -1000\,dt \implies \frac{x^2}{2}\bigg|_{x(0)}^{x} = -1000\bigg|_0^t$$
$$\iff x^2 - 1000^2 = -2000t \iff x = \sqrt{1000^2 - 2000t},$$

então $x = 0$ quando $t = 500$.

Pontuação. Obter uma equação diferencial que resolve o problema vale **4 pontos**, resolvê-la vale **6 pontos**. Pontuações parciais na resolução da diferencial podem ser consideradas.

Problema 2 Considere as matrizes 3×3 cujas entradas são inteiros entre 0 e 9 (inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.
Solução. Seja $A = (a_{ij})_{3\times3}$ a matriz.

Como $\det(A)$ é linear em cada entrada, basta considerar $a_{ij} = 0$ ou $a_{ij} = 9$, de modo que $A = 9B$ com $B = (b_{ij})_{3\times3}$ e $b_{ij} \in \{0, 1\}$ (**3 pontos**).

Desenvolvendo pela primeira coluna, o determinante de B é menor ou igual a 3 (**+2 pontos**).

Mas para dar 3, devemos ter $b_{11} = b_{21} = b_{31} = 1$ e seus menores 2×2 teriam que ser todos 1. Então pelo b_{11} temos $b_{22} = b_{33} = 1$; pelo b_{31} vem $b_{12} = b_{23} = 1$. Mas aí o outro menor, do b_{21}, é $1 - b_{31}b_{32}$ que não vai ser -1 nunca. Então 3 não é possível e o determinante de B é no máximo 2 (**Mostrar que** $\det(B) = 3$ **não é possível: +3 pontos**).

O exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mostra que $\det(B) = 2$ é possível e portanto o máximo de $\det(A)$ é $2 \cdot 9^3 = 1458$. (**Mostrar o exemplo: +2 pontos**)

Problema 3 Determine todos os pares de inteiros positivos (n, r) para os quais pode existir uma festa com n participantes em que cada participante conhece exatamente r outros participantes.
Obs.: Conhecer é uma relação simétrica.
Solução. Considere n pontos ao longo de um círculo, vértices de um polígono regular, e o grafo de amizades. Se $r = 2k$, construímos o seguinte exemplo: ligamos cada ponto com os k vizinhos mais próximos de cada lado; se $r = 2k + 1$ é ímpar e n é par, ligamos cada ponto com seus k vizinhos mais próximos e também com o vértice oposto.

Se ambos sao ímpares, não vai dar, pois a soma dos graus $n \cdot r$ deve ser o dobro do número de arestas no grafo.

Pontuação: Construir um exemplo para r par vale **4 pontos**, construir um exemplo para n par vale **4 pontos**, mostrar que não é possível para n e r ímpares vale **2 pontos**.

Problema 4 Seja D_n o conjunto dos racionais p/q com p, q inteiros, $0 < q \le n$ e $0 \le p \le q$.

a) Prove que, para todo $n \ge 3$, dados $x, y \in D_n$ distintos, temos sempre

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| > \pi^2/n^3.$$

b) Prove que para todo $c > \pi^2$ e todo n_0 natural existem $n > n_0$ e $x, y \in D_n$ distintos tais que

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| < c/n^3.$$

Solução. a) Podemos supor sem perda de generalidade que $y > x$. Temos 3 casos:

i) $x = 0$: temos $|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| = 1 - \cos(\pi y) = 2\text{sen}^2(\pi y)/2 > 4y^2 \ge 4/n^2 \ge 12/n^3 > \pi^2/n^3, \forall n \ge 3$ (pois $\text{sen}(\pi x) \ge 2x$ para $0 \le x \le 1/2$).

ii) $y = 1$: temos $|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| = |\cos(\pi(1-y)) - \cos(\pi(1-x))|$, com $0 \le 1-y < x \le 1$, e a desigualdade segue do caso anterior, pois $1 - x, 1 - y$ também pertencem a D_n.

[1 ponto para os casos *i)* e *ii)*]

iii) $0 < x < y < 1$: pelo Teorema do Valor Médio, $|cos(\pi x) - cos(\pi y)| = \pi\text{sen}(\pi c)|x - y|$ onde $1/n \le x < c < y \le 1 - 1/n$, donde $\text{sen}(\pi c) \ge \text{sen}(\pi/n)$; por outro lado, como $x, y \in D_n$, $|x - y| \ge 1/n(n-1)$, e portanto $|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| \ge \text{sen}(\pi/n)/n(n-1)$. Basta agora provar que $\text{sen}(\pi/n)/n(n-1) \ge \pi^2/n^3, \forall n \ge 3$. Isso equivale a $\text{sen}(\pi/n) \ge \pi(n-1)/n^2, \forall n \ge 3$. Vamos mostrar que $\text{sen}(\pi t) \ge \pi(t - t^2)$ para $0 \le t \le 1/3$, e o resultado segue fazendo $t = 1/n$. Como vale a igualdade para $t = 0$, a derivada de $\text{sen}(\pi t)$ é $\pi\cos(\pi t)$ e a derivada de $\pi(t-t^2)$ é $\pi(1-2t)$, basta provar que $\pi\cos(\pi t) \ge \pi(1 - 2t)$, para $0 \le t \le 1/3$, mas temos

$$\pi\cos(\pi t) \ge \pi(1-2t) \iff \cos(\pi t) \ge 1-2t \iff 2\text{sen}^2(\pi t/2) = 1-\cos(\pi t) \le 2t \iff \text{sen}^2(\pi t/2) \le t$$

e $\text{sen}^2(\pi t/2) \le (\pi t/2)^2 = \pi^2 t^2/4 \le t$ para $0 \le t \le 4/\pi^2$. Como $4/\pi^2 > 1/3$ a afirmação é verdadeira.

[5 pontos por concluir a solução do item a)]

b) É suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} n^3(\cos(\pi/n) - \cos(\pi/(n-1))) = \pi^2.$$

Note que $|\cos(\pi/n) - \cos(\pi/(n-1))| = \pi\text{sen}(\pi c_n)/n(n-1)$, para algum $c_n \in (1/n, 1/(n-1))$, pelo Teorema do Valor Médio; temos portanto

$$\lim_{n\to+\infty} n^3(\cos(\pi/n) - \cos(\pi/(n-1)) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \cdot \pi\text{sen}(\pi c_n)/n(n-1) =$$

$$= \pi^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}(\pi c_n)}{\pi c_n} \lim_{n\to+\infty} (n \cdot c_n) = \pi^2.$$

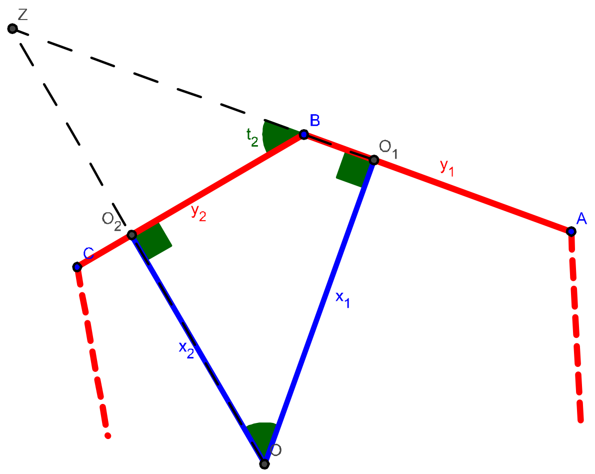
[4 pontos por resolver o item b)]

Problema 5 Sejam $t_1, t_2, ..., t_n$ reais positivos tais que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 2\pi$ e O um ponto fixo do plano. Considere a família de polígonos convexos de n lados contendo O em seu interior cujos ângulos externos sejam respectivamente $t_1, t_2, ..., t_n$. Sejam y_i o comprimento do i-ésimo lado, e x_i a distância de O ao i-ésimo lado.

a) Mostre que o vetor $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ depende linearmente do vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, isto é, existe uma matriz $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ que só depende dos $t_i, 1 \le i \le n$ tal que $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, para $1 \le i \le n$.

b) Considere um segundo polígono desta mesma família, e defina x'_i e y'_i de maneira análoga. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i$.

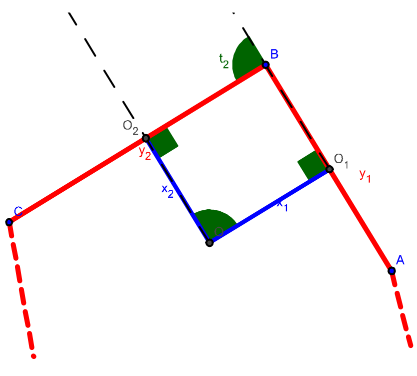
Solução. a) Sejam O_1 e O_2 as projeções ortogonais de O sobre os lados AB (de comprimento y_1) e BC (de comprimento y_2). Seja Z o ponto de encontro das retas OO_2 e AB. Suponha inicialmente que ambas as projeções estão nos respectivos lados:



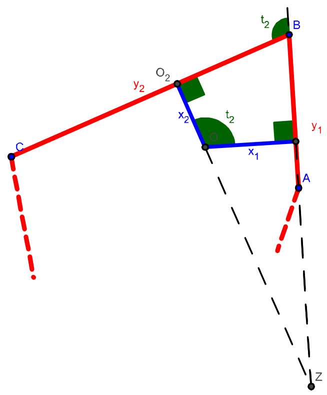
Como o quadrilátero OO_1BO_2 tem dois ângulos de $\frac{\pi}{2}$, vem $\angle O_1OO_2 = \angle DBO_2 = t_2$. Do triângulo OO_1Z vem $ZO = x_1 \sec t_2$, portanto $ZO_2 = x_1 \sec t_2 - x_2$. Assim, do triângulo BO_2Z:

$$O_2B = (x_1 \sec t_2 - x_2) \cot t_2 = x_1 \csc t_2 - x_2 \cot t_2$$

Note que esta fórmula funciona mesmo que $t \ge \frac{\pi}{2}$, com raciocínios análogos:



Caso $t = \frac{\pi}{2}$. Temos $O_2B = x_1$.



Caso $t > \frac{\pi}{2}$.

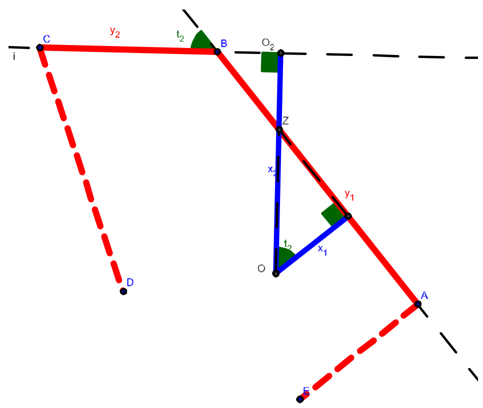
Analogamente,

$$O_2C = x_3 \csc t_3 - x_2 \cot t_3$$

Portanto

$$y_2 = BO_2 + O_2C = x_1 \csc t_2 - x_2 (\cot t_2 + \cot t_3) + x_3 \csc t_3$$

Enfim, se a projeção de O sobre a reta BC está fora do lado BC (digamos, s.p.d.g., à direita de B como na figura abaixo)



então a fórmula para O_2B passa a ter o sinal trocado

$$O_2B = (x_2 - x_1 \sec t_2) \cot t_2 = -x_1 \csc t_2 + x_2 \cot t_2$$

mas então

$$y_2 = CO_2 - BO_2 = x_1 \csc t_2 - x_2 (\cot t_2 + \cot t_3) + x_3 \csc t_3$$

volta a ser a fórmula encontrada anteriormente.

Variando o lado desejado, mostramos que

$$y_k = x_{k-1} \csc t_k - x_k (\cot t_k + \cot t_{k+1}) + x_{k+1} \csc t_{k+1} \text{ para } k = 1, 2, ..., n$$

onde índices são tomados $\bmod n$. Ou seja, $\vec{y} = A\vec{x}$ onde A é a matriz "cíclica tridiagonal":

$$A = \begin{pmatrix} -\cot t_1 - \cot t_2 & \csc t_2 & 0 & \cdots & 0 & \csc t_1 \\ \csc t_2 & -\cot t_2 - \cot t_3 & \csc t_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \csc t_3 & -\cot t_3 - \cot t_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \csc t_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cot t_{n-1} - \cot t_n & \csc t_n \\ \csc t_1 & 0 & 0 & \cdots & \csc t_n & -\cot t_n - \cot t_1 \end{pmatrix}$$

b) **Primeira solução:** note que $\vec{y} = A\vec{x}$ e $\vec{y}_i' = A\vec{x}_i'$. Usando o produto interno canônico $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$, temos

$$\sum x_i y_i' = \langle \vec{x}, \vec{y}' \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{x}' \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{x}' \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x}' \rangle = \sum x_i' y_i$$

onde a igualdade central se justifica pois A é simétrica (vide item anterior).

Segunda solução: faça uma homotetia de razão k no polígono original para que ele fique completamente contido no interior do segundo (note que isto não afeta a igualdade que queremos demonstrar, pois ambos os lados ficam multiplicados pela mesma razão k). Sendo $P = P_1P_2...P_n$ o polígono interior e $Q = Q_1Q_2...Q_n$ o exterior, suas áreas são

$$\begin{aligned} A(P) &= \sum A(OP_iP_{i+1}) = \sum \frac{x_iy_i}{2} \\ A(Q) &= \sum A(OQ_iQ_{i+1}) = \sum \frac{x_i'y_i'}{2} \end{aligned}$$

Agora, a área entre os polígonos pode ser dividida em trapézios T_i da forma $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, cujas áreas são

$$A(T_i) = \frac{y_i + y_i'}{2} \cdot (x_i' - x_i)$$

Portanto

$$\begin{aligned} A(Q) - A(P) &= \sum \frac{(y_i + y_i')(x_i' - x_i)}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum x_i'y_i' - \sum x_iy_i = \sum (y_i + y_i')(x_i' - x_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum x_iy_i' = \sum x_i'y_i \end{aligned}$$

Pontuação:

a) TOTAL: 5 pontos

Demonstrar a fórmula para y_k em função de x_{k-1}, x_k e x_{k+1} em pelo menos um dos casos mais gerais (O_2 dentro **ou** fora de y_2; com ângulo externo agudo **ou** obtuso): **4 pontos.**

Considerar os outros casos gerais (O_2 fora ou dentro de y_2; **e também** ângulo externo obtuso ou agudo) e mostrar (mesmo que por simples analogia) que a fórmula ainda se mantém: 1 **ponto.**

O caso $t_i = \frac{\pi}{2}$ vale 0 pontos. Se o aluno considerar os casos gerais mas não mencionar este, ainda assim recebe a pontuação integral.

Observações: o enunciado não explicita se t_i é o ângulo entre y_{i-1} e y_i ou entre y_i e y_{i+1}. Assim, a seguinte matriz também está correta:

$$A = \begin{pmatrix} -\cot t_n - \cot t_1 & \csc t_1 & 0 & \cdots & 0 & \csc t_n \\ \csc t_1 & -\cot t_1 - \cot t_2 & \csc t_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \csc t_2 & -\cot t_2 - \cot t_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \csc t_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cot t_{n-2} - \cot t_{n-1} & \csc t_{n-1} \\ \csc t_n & 0 & 0 & \cdots & \csc t_{n-1} & -\cot t_{n-1} - \cot t_2 \end{pmatrix}$$

b) TOTAL: 5 pontos

Na segunda solução: supor que um polígono é interno ao outro sem considerar porque esta hipótese não afeta o enunciado: **-1 ponto**.

Nota. Vê-se do contexto do problema que a "distância ao i-ésimo lado"tem que ser interpretada como "distância à sua reta suporte". Isto dito, se o aluno interpretar esta distância no sentido mais formal (distância de ponto a conjunto), o enunciado torna-se incorreto. Por este motivo, o aluno que apresentar contra-exemplos explícitos ganha pontuação integral (5 pontos para contra-exemplo do primeiro item, 5 pontos para contra-exemplo do segundo item).

Problema 6 Zé Pantera percorre um caminho em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ guiado por um dado. Começa em 0 e a cada segundo joga um dado honesto, obtendo um número s entre 1 e 6; se está em x pula para $x + s$. Seja x_n a probabilidade de Zé Pantera estar em n em algum momento. Prove que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ e determine esse limite.

Solução. Temos $x_{n+6} = (x_{n+5}+x_{n+4}+x_{n+3}+x_{n+2}+x_{n+1}+x_n)/6, \forall n \geq -5$ (onde $x_0 = 1$ e convencionamos $x_n = 0$ para $-5 \leq n \leq -1$). Assim, a sequência (x_n) satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é $P(x) = x^6 - (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)/6$. Temos $P(1) = 0$. Além disso, se $|\alpha| \geq 1$ e $P(\alpha) = 0$, definindo $\beta = 1/\alpha$, temos $|\beta| \leq 1$ e $1 = (\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6)/6$. Como

$$\left|\frac{\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6}{6}\right| \leq \frac{|\beta| + |\beta|^2 + |\beta|^3 + |\beta|^4 + |\beta|^5 + |\beta|^6}{6} \leq 1,$$

e vale a igualdade se e somente se $\beta = 1$. Assim, temos necessariamente $\alpha = 1/\beta = 1$. Como $P(x) = (x-1)(x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{3}{6}x^2 + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6})$, 1 é raiz simples de $P(x)$, e logo as outras raízes de $P(x)$ têm módulo estritamente menor que 1. Isso implica que (x_n) converge.

[3 pontos por provar a convergência de (x_n)**]**

Obs.: Alternativamente, podemos definir $y_n = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}, x_{n-5}) \in \mathbb{R}^6$. Temos que $y(n+1) = Ay(n), \forall n \geq 0$, para uma matriz estocástica A. Portanto (y_n) converge, e logo (x_n) também converge.

Vamos agora determinar $\lim x_n$. Como $P(x) = (x-1)(x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{3}{6}x^2 + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6})$, temos que $z_n := x_{n+5} + \frac{5}{6}x_{n+4} + \frac{4}{6}x_{n+3} + \frac{3}{6}x_{n+2} + \frac{2}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n$ é constante (note que a igualdade $z_{n+1} = z_n$ é equivalente à recorrência $x_{n+6} = (x_{n+5} + x_{n+4} + x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)/6$). Assim, para todo $n \geq -5$, $z_n = x_0 + \frac{5}{6}x_{-1} + \frac{4}{6}x_{-2} + \frac{3}{6}x_{-3} + \frac{2}{6}x_{-4} + \frac{1}{6}x_{-5} = 1$. Por outro lado, se (x_n) converge a L, z_n converge a $(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6})L = 7L/2$, donde $7L/2 = 1$ e portanto $\lim x_n = L = 2/7$.

[7 pontos por determinar $\lim x_n$**]**

Obs.: Alternativamente, pela lei dos grandes números, com probabilidade total cada possível resultado $s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ do dado ocorre com frequência limite $1/6$, e portanto, se P_n é a posição de Zé Pantera após n segundos, temos, com probabilidade total, $\lim P_n/n = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 7/2$. Assim, com probabilidade total, Zé Pantera passa por $2/7$ dos inteiros positivos (assintoticamente), e logo, como (x_n) converge, temos $\lim x_n = 2/7$.