# XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática
# GABARITO Segunda Fase

## Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

**CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A**
Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

| **Problema** | **01** | **02** | **03** | **04** | **05** |
|---|---|---|---|---|---|
| Resposta | **66** | **197** | **174** | **8** | **6174** |

**01.** Seja $x$ a idade de Ludmilson. Logo, $(x-55)(x+55)=p^3$, onde $p$ é primo. Temos então, duas possibilidades:

i)

$$\begin{cases} x-55=1 \\ x+55=p^3 \end{cases}$$

Nesse caso teríamos $x=56$ e $p=111$, absurdo, pois $111$ não é primo.

ii)

$$\begin{cases} x-55=p \\ x+55=p^2 \end{cases}$$

Com isso, $110=p^2-p=p(p-1)=11.10$. E assim teremos $p=11$ e $x=66$. Logo, a idade de Ludmilson é 66 anos.

**02.** $(100.10^{-8} + 3 - 100.10^{3}-3) / (10^{-8} - 10^{3}) - 100.(-1) - 3 = 100(10^{-8} - 10^{3}) / (10^{-8} - 10^{3}) + 97 = 100 + 97 = 197$.

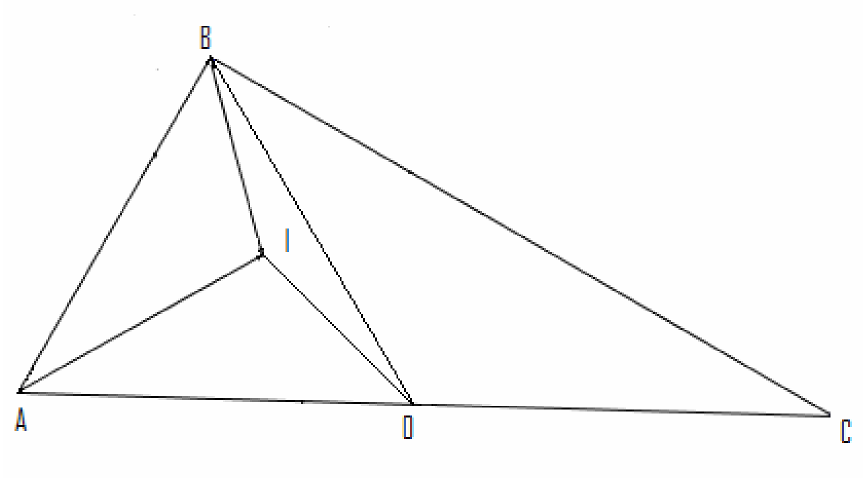
**03.** Note que os triângulos *PTA*, *ABD*, *BCE*, e *PQC* são todos isósceles. Como $\angle STP = 108°$, $\angle PTA = \angle PAT = 72°$. Assim, temos que $\angle TPA = 36°$ e $\angle BAD = \angle BDA = 18°$. Além disso, $\angle ABD = 144°$ e $\angle CBE = 66°$. Como $\angle QPC = 126°$, temos que $\angle QCP = 27°$ e $\angle ECB = 57°$. Logo, $\angle QCE = 174°$.

**04.** Tente 1, 2, 3 ... e perceba que, somente com $n = 5$, $K$ terá 5 algarismos. Assim, $K = 2608 . 5 = 13040$. Com isso, a soma dos algarismos de $K$ é 8.

**05.** A partir do sétimo termo, todos serão iguais a 6174.

## Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:**




Como $ABC$ é um triângulo retângulo, então $AO = BO = CO$. Se $\angle ABI = \angle AOI = 45^o$ e $\angle BAI = \angle OAI$, então $\Delta ABI \equiv \Delta AOI$ (ALA). Com isso, $AB = AO = BO$, e portanto, triângulo $ABO$ é eqüilátero. Assim, $\angle ACB = 30^o$.

**CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**
- Percebeu que $AO = BO = CO$ **[ 2 pontos]**
- Percebeu que os triângulos $ABI$ e $AOI$ são congruentes **[ 5 pontos ]**
- Concluiu o problema **[ 3 pontos ]**

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:**

É fácil ver que $(x-2)(x-3)+(x-3)(x+1)+(x+1)(x-2) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$.

Fazendo $x = -1$, 2 e 3, nesta igualdade, temos que,

$(\alpha+1)(\beta+1) = 4$, $(\alpha-2)(\beta-2) = -1$, $(\alpha-3)(\beta-3) = \frac{4}{3}$.

Com isso, $\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} = \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 0.$

**CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**
- Escreveu $(x-2)(x-3)+(x-3)(x+1)+(x+1)(x-2)$ na forma $ax^2+bx+c$ e resolveu a equação **[1 ponto];**
- Percebeu que: $(x-2)(x-3)+(x-3)(x+1)+(x+1)(x-2) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$ **[3 pontos]**
- Fez as substituições do tipo $x = -1$, 2 e 3 **[4 pontos]**
- Concluiu o problema **[2 pontos]**

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:**

a) $N = 23 \cdot (23^4 - 1) = 23 \cdot (23^2 + 1)(23^2 - 1) = 23 \cdot (23^2 + 1)(23 + 1)(23 - 1) = 23 \cdot 530 \cdot 24 \cdot 22 =$

$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 53$ O número de divisores (positivos) de $N$ é $6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$.

b) $N = n^5 - n = n(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$.

Necessariamente, $n$ ou $n + 1$ é par. Logo, 2 divide $N$. Do mesmo modo, um dos números $n - 1$, $n$ ou $n + 1$ é múltiplo de 3. Logo 3 também divide $N$. Finalmente, se nenhum dos 3 números $n - 1$, $n$ ou $n + 1$ é múltiplo de 5, então $n$ é da forma $5k + 2$ ou $5k + 3$. No primeiro caso, temos $n^2 + 1 = 25k^2 + 10k + 5$ e, no segundo, $n^2 + 1 = 25k^2 + 15k + 10$, ambos múltiplos de 5. Portanto, um dos números $n, n-1, n+1$ ou $n^2 + 1$ é múltiplo de 5.

Assim $N$ é, simultaneamente, múltiplo dos números primos entre si 2, 3 e 5, o que prova que $N$ é múltiplo de 30.

**CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**
- Fatorar corretamente $23^5 - 23$ ou $n^5 - n$: **[3 pontos]**
- Contar corretamente os divisores na forma fatorada: **[2 pontos]**
- Mostrar que $n^5 - n$ é múltiplo de 2: **[1 ponto]**
- Mostrar que $n^5 - n$ é múltiplo de 3: **[1 ponto]**
- Mostrar que $n^5 - n$ é múltiplo de de 5: **[2 pontos]**
- Completar corretamente o argumento: **[1 ponto]**

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:**

Vamos começar colorindo a primeira linha de vértices. Cada coloração dessa linha é uma seqüência de letras “A” e “V”, por exemplo, A V V A V. Observe que, uma vez colorida a primeira linha, se aparecerem duas letras consecutivas iguais, o restante dos vértices do tabuleiro já estão determinados. De fato, ao aparecer dois V’s consecutivos, os dois vértices imediatamente abaixo deles deverão ser coloridos com dois A’s, os que estão mais abaixo deverão ter dois V’s, e assim por diante. Isto completa a coloração dessas duas colunas. Dessa forma, cada coluna vizinha também estará determinada, pois em cada retângulo teremos três vértices previamente coloridos, o que obriga o quarto vértice a ter sua cor determinada. Então, para cada seqüência de A’s e V’s na primeira linha que contém pelo menos duas letras iguais consecutivas, há exatamente uma maneira de colorir o tabuleiro. Como há $2^5 - 2 = 30$ de tais seqüências, contamos 30 colorações possíveis.

$$\begin{array}{ccccc} A & V & V & A & V \\ & A & A & & \\ & V & V & & \\ & A & A & & \\ & V & V & & \end{array}$$

Falta-nos analisar um segundo caso, em que não há duas letras consecutivas iguais na primeira linha. Há duas possibilidades de seqüências: começando com A ou começando com V.

$$\begin{array}{ccccc} A & V & A & V & A \\ V & & & & \end{array}$$

Para cada uma dessas seqüências, há duas maneiras de escolhermos a primeira letra da segunda linha. Uma vez escolhida esta letra, a segunda linha inteira também estará determinada. Para a primeira letra da terceira linha também há 2 possibilidades. Com este raciocínio, cada vez que escolhemos a primeira letra de uma linha, determinamos a coloração desta linha. Logo, como há duas maneiras de escolhermos a primeira letra de cada linha, há $2^5 = 32$ maneiras de colorirmos o tabuleiro, neste segundo caso. Logo, o total de colorações é igual a $30 + 32 = 62$.

**Observação:** Veja que, no caso geral, para um quadrado $n \times n$, o raciocínio é análogo. No primeiro caso, teremos $2^{n+1} - 2$ colorações; no segundo caso, mais $2^{n+1}$. Logo, teremos $2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$ colorações.

**CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**

- Contar corretamente o números de colorações (62), por qualquer método **[10 pontos]**

- **Pontos parciais:** Observar que, sempre que uma linha ou coluna tem dois elementos consecutivos iguais, a coloração fica determinada **[2 pontos]**
- Contar corretamente o número de colorações (30) em que a primeira linha ou coluna tem dois elementos consecutivos iguais **[3 pontos]**
- Contar corretamente o número de colorações (32) em que a primeira linha ou coluna tem, elementos alternados **[4 pontos]**