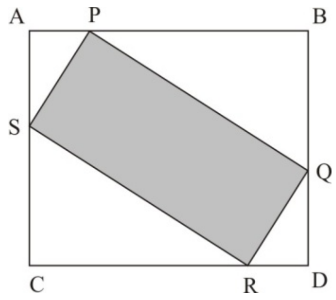
XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)
PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Na figura, os vértices do retângulo *PQRS* pertencem aos lados do retângulo *ABCD*. Sendo $AP = 3$cm, $AS = 4$ cm, $SC = 6$ cm e $CR = 8$ cm, qual é a área do retângulo *PQRS*, em cm^2?



02. Em cada vértice de um cubo foi escrito um número. Esmeralda calcula a soma dos números escritos nos vértices de cada face e encontra os números 8, 10, 11, 12, 13 e x. Se a face de soma 8 é oposta à face de soma x, qual é o valor de x?

03. Duas tribos vivem numa ilha. Os da tribo azul só dizem a verdade e os da vermelha, só mentira. Um dia, 100 pessoas da ilha se reuniram num círculo e um repórter se dirigiu a cada uma delas, com a pergunta: "O seu vizinho à direita é um mentiroso?". Terminada a pesquisa, verificou-se que 48 pessoas responderam "sim". No máximo, quantas pessoas da tribo vermelha poderiam estar no círculo?

04. Com cubinhos de mesmo tamanho construiu-se um cubo $4 \times 4 \times 4$. Os cubinhos são feitos de madeiras diferentes e foram colados assim: cubinhos com três cubos vizinhos (cubos com faces comuns) pesam 10 gramas, com quatro vizinhos pesam 8 gramas, com cinco vizinhos pesam 6 gramas e com seis vizinhos pesam 4 gramas. Qual é a massa do cubo, em gramas?

05. Quantos números de três algarismos diferentes de zero têm pelo menos dois algarismos iguais?

06. Dizemos que dois ou mais números são *irmãos* quando têm exatamente os mesmos fatores primos. Por exemplo, os números $10 = 2 \times 5$ e $20 = 2^2 \times 5$ são irmãos, pois têm 2 e 5 como seus únicos fatores primos. O número 60 tem quantos irmãos menores do que 1000?

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

A sequência 1, 5, 4, 0, 5, ... é formada pelos algarismos das unidades das somas a seguir

$$1^2 = \underline{1}$$
$$1^2 + 2^2 = \underline{5}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1\underline{4}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3\underline{0}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4\underline{5}$$
$$\dots$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots = \dots ?\underline{?}$$

a) Escreva a sequência formada pelos algarismos das unidades das dez primeiras somas obtidas da forma descrita acima.

b) Qual é o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \dots + 2011^2$?

PROBLEMA 2

Vamos chamar de selo *de um número inteiro positivo* o par $(x; y)$ no qual x é o número de divisores positivos desse número menores do que ele e y é a soma desses divisores. Por exemplo, o selo do número 10 é $(3;8)$ pois o número 10 tem como divisores menores do que ele os números 1, 2 e 5, cuja soma é 8. Já o selo do número primo 13 é $(1;1)$.

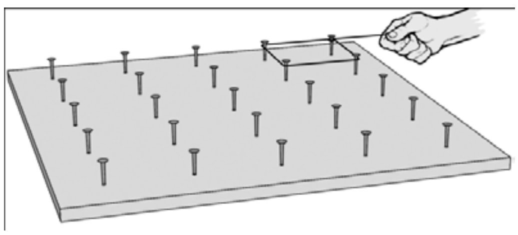
a) Qual é o selo do número 9?

b) Qual número tem o selo $(2;3)$?

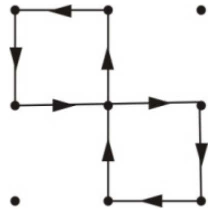
c) Há números cujo selo é $(6;m)$. Qual é o menor valor possível para m?

PROBLEMA 3

Amarrando um pedaço de barbante em um dos pregos do seu geoplano, Diamantino consegue formar quadrados, *sem passar o barbante duas vezes pelo mesmo lado desses quadrados*. A figura ao lado mostra um quadrado obtido desta maneira.



A figura abaixo representa de forma simplificada uma parte do geoplano em que foram obtidos dois quadrados da maneira descrita acima, partindo-se de qualquer um dos pregos.



a) Desenhe, na parte do geoplano representada ao lado, a maior quantidade de quadrados iguais que Diamantino pode obter com um único pedaço de barbante. Coloque as flechinhas como no exemplo para indicar como foi colocado o barbante.

b) Diamantino garante que pode obter 11 quadrados no seu geoplano. Mostre que você também pode obter a mesma quantidade na figura abaixo. Não se esqueça das flechinhas no desenho.