XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática

GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	**8**	**60**	**8**	**9**	**499**	**38**

Respostas:
Parte A

01. [Resposta: 8]

Volume de um copo de água é igual a $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$ do volume da jarra. Falta encher $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ da jarra. Para isso são necessários $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}=\frac{2}{3}\times 12=8$ copos.

02. [Resposta: 60]

Como o algarismo das unidades do produto é 2, o algarismo das unidades do multiplicando é 4.

$$\begin{array}{cccccc} & & & \square & 1 & 4 \\ & & \times & 2 & 9 & 3 \\ \hline & & \square & \square & 4 & 2 \\ & 4 & \square & 2 & 6 & + \\ \square & 0 & 2 & 8 & & \\ \hline 1 & \square & 0 & \square & 0 & 2 \end{array}$$

Assim, obtemos o algarismo da direita da 3ª linha do algoritmo e também os dois últimos algarismos da 5ª linha, conforme figura à direita. Como o algarismo das dezenas do produto é 0, o algarismo da direita na 4ª linha do algoritmo deve ser 6. Logo o algarismo das dezenas do multiplicador é 9, conforme figura à esquerda. Como o 2º algarismo à direita 5ª linha é 0, o algarismo das centenas do multiplicando é 5. A partir do algoritmo completo, mostrado à direita, concluímos que a soma dos algarismos que foram borrados é

$5+4+9+1+5+2+6+6+1+2+8+5+6=60$

$$\begin{array}{cccccc} & & & \square & 1 & 4 \\ & & \times & 2 & \square & 3 \\ \hline & & \square & \square & 4 & 2 \\ & 4 & \square & 2 & \square & + \\ \square & 0 & 2 & 8 & & \\ \hline 1 & \square & 0 & \square & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 1 & 4 \\ & & \times & 2 & 9 & 3 \\ \hline & & 1 & 5 & 4 & 2 \\ & 4 & 6 & 2 & 6 & + \\ 1 & 0 & 2 & 8 & & \\ \hline 1 & 5 & 0 & 6 & 0 & 2 \end{array}$$

03. [Resposta: 8]

Cada 3 faces que podem ser vistas ao mesmo tempo compartilham um vértice. Como o cubo tem 8 vértices, o número de composições de cores percebidas visualmente é 8.

04. [Resposta: 9]

Os números 1^2, 2^2, 3^2 possuem um algarismo. Os números 4^2, 5^2, ..., 9^2 possuem dois algarismos. Os números 10^2, 11^2, ..., 31^2 possuem três algarismos. Assim, ao escrever o quadrado do número 31, o número de algarismos escritos é $1\times 3+2\times 6+3\times 22=81$, faltando escrever 19 algarismos. Com os quadrados de 32, 33, 34 e 35, temos mais $4\times 4=16$ algarismos, faltando ainda escrever apenas três algarismos. Como o quadrado de 36 é 1296, concluímos que o último algarismo escrito foi o 9, o centésimo algarismo escrito por Esmeralda.

05. [Resposta: 499]

Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o MDC entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

06. [Resposta: 38]

Quem acerta a questões e erra b obtém $3a - b$ pontos, com $a + b \leq 10$. Obtemos os números de 0 a -10 com $a = 0$, ao todo 11 inteiros. Obtemos os números de 1 a 30 usando os valores 0, 1 ou 2 para b, não obtendo apenas $3.9 - 2 = 25$, $3.10 - 1 = 29$ e $3.10 - 2 = 28$, pois nesses casos ficamos com $a + b > 10$, ao todo $30 - 3 = 27$ inteiros. Logo, o número máximo de candidatos nas condições apresentadas é $11 + 27 = 38$.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Em cada figura, a área do quadrado cinza é uma fração da área do quadrado original. Nas figuras apresentadas, a partir da segunda, as áreas são iguais, respectivamente, a

$\frac{4}{9}\times 27\times 27$

$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times 27\times 27$

$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times 27\times 27=64$

a) Na 4ª figura, a área do quadrado cinza é igual a 64, segundo os produtos acima.

b) Na 5ª figura, admitindo que a obtenção do quadrado cinza seja feita da mesma maneira, a sua área é igual a $\frac{4}{9}$ da área do quadrado cinza da 4ª figura, ou seja, é igual a $\frac{4}{9}\times 64=\frac{256}{9}\text{ cm}^2$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Total **[5 pontos]**

- Perceber que a área é multiplicada por 4/9 de um quadrado cinza para o próximo **[2 pontos]**
- Calcular a área cinza de cada uma das figuras da segunda até a quarta **[1 ponto]**

b) Total **[5 pontos]**

- Multiplicar o valor obtido na 4ª figura (mesmo errado) por 4/9 **[2 pontos]**

Concluir **[3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Para um número cujo algarismo das dezenas é **a** e cujo algarismo das unidades é **b**, temos $10a+b=2(a+b)$ ou $a+b=2(10a+b)$. A segunda equação não tem soluções positivas, e na primeira equação temos $10a+b=2(a+b)\Leftrightarrow 10a+b=2a+2b\Leftrightarrow 8a=b$. Necessariamente temos a = 1 e b = 8. De fato, no cartão de número 18 a soma dos algarismos é 9.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

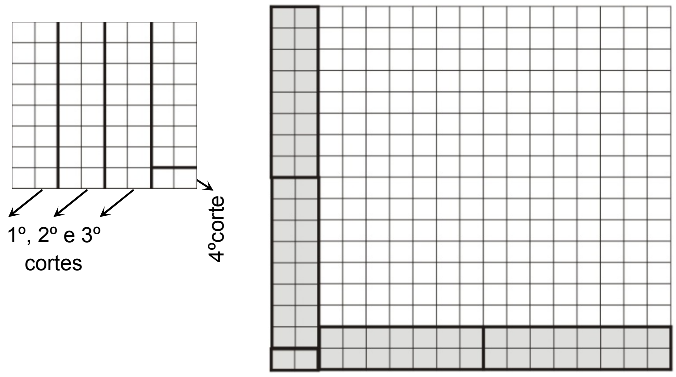
- Mostrar a forma $10a+b$ de um número de 2 algarismos **[2 pontos]**
- Exibir cada uma das equações $10a+b=2(a+b)$ e $a+b=2(10a+b)$ **[1 ponto]**
- Concluir que a última não tem solução **[2 pontos]**
- Chegar na forma $8a=b$ **[2 pontos]**
- Encontrar a solução e concluir que só existe 1 cartão **[2 pontos]**

A seguinte pontuação não se acumula com as demais

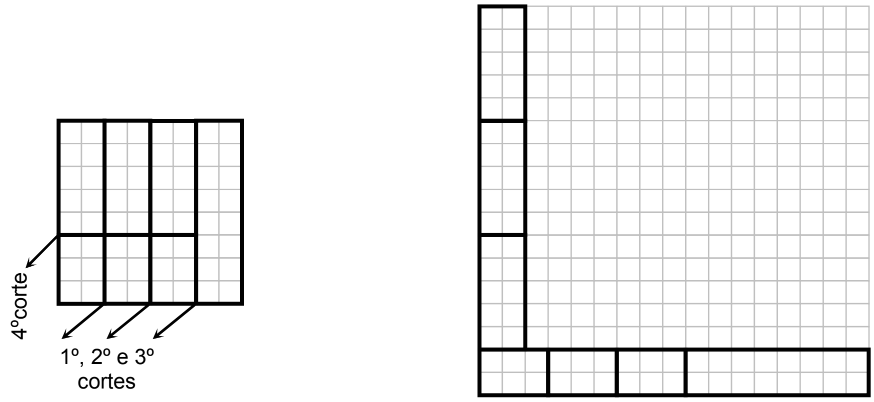
- Escrever a soma dos algarismos de **todos** os números de 10 a 99 **corretamente** e concluir **[10 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

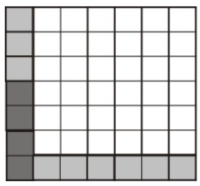
a) Bastam 4 cortes no quadrado de lado 8 cm, conforme ilustrado nos desenhos à direita.



Ou ainda, como a figura a seguir.

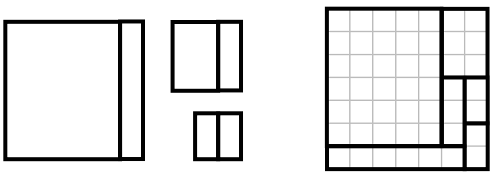


b) Uma possibilidade **(exemplo 1)** é juntar ao quadrado maior pedaços dos quadrados menores, obtendo-se um quadrado de área 4 + 9 + 36 = 49 cm^2. Para isso, dividimos o quadrado de lado 3 em três tiras 3×1 com dois cortes e o quadrado de lado 2 em duas tiras 2×1 com um corte, num total de 3 cortes, conforme desenho à esquerda. Menos que 3 cortes não formam peças que se encaixam na região sombreada.

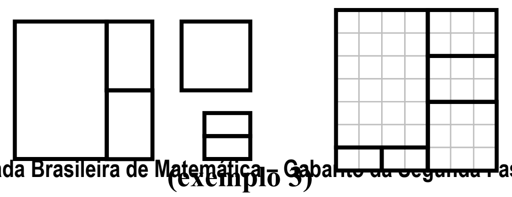


(exemplo 1)

Outras maneiras **(exemplos 2 e 3)** demontar o quadrado também com três cortes são apresentadas ao lado.



(exemplo 2)



(exemplo 3)

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Total **[5 pontos]**

- Particionar o "L" em dois retângulos de medidas 2×15 e 2×17. **[2 pontos]**
- Determinar corretamente os três cortes que determinam as medidas de dimensões 2 **[1 ponto]**
- Determinar o outro corte, perpendicular aos três primeiros. **[2 pontos]**

b) Total **[5 pontos]**

- Caso a construção seja como o exemplo 1 (o caso "L"):
- Particionar o "L" em três retângulos **[2 pontos]**
- Determinar os três cortes que a determinam. **[3 pontos]**

- Caso a construção seja como os exemplos 2 e 3 (particionando o quadrado de lado 6):

- Um dos cortes do quadrado de lado 6 correto. (retângulos 6×5 ou 6×4) **[2 pontos]**
- Demais cortes corretos **[3 pontos]**