XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0050	0015	0076	0448	0225	0018

01. [Resposta: 0050]
Solução: Por simetria, os triângulos *APS* e *DRQ* são congruentes, assim como os triângulos *SCR* e *QBP*. Assim, os lados do retângulo *ABDC* são *AS* + *SC* = 4 + 6 = 10 cm e *CR* + *RD* = *CR* + *AP* = 8 + 3 = 11 cm. Deste modo, a área do retângulo *PQRS* é obtida subtraindo as áreas dos triângulos *APS*, *DRQ*, *SCR* e *QBP* da área do retângulo *ABDC*, ou seja, é $8\cdot 11-2\cdot\frac{3\cdot 4}{2}-2\cdot\frac{6\cdot 8}{2}=50\ \text{cm}^2$.

02. [Resposta: 0015]
Solução: Se em cada face estiver escrita a soma dos números dos vértices correspondentes a face, então a soma dos números em duas faces opostas é igual a soma dos números de todos os vértices do cubo. Logo se 8 e x é um par de faces opostas, então outro par de faces opostas é 10 e 13 e o terceiro par é 11 e 12, para que 10 + 13 = 11 + 12 = soma dos números em todos os vértices. Portanto $8+x=23 \Leftrightarrow x=15$.

03. [Resposta: 0076]
Solução: Observe que se uma pessoa responde "sim", então esta pessoa e a da direita não são da mesma tribo, mas se responder "não", então ela e a pessoa à sua direita são da mesma tribo. Assim, se 48 pessoas responderam "sim", então ao percorrer o círculo no sentido horário, observaremos 48 trocas de cor da tribo. Para que haja 48 trocas, devem haver pelo menos 24 pessoas da tribo azul e 24 da tribo vermelha dispostas alternadamente. Como queremos o máximo de pessoas da tribo vermelha, então podemos colocar as 100 – 24 – 24 = 52 pessoas restantes juntas num mesmo bloco vermelho, como indicado a seguir:

$$\underbrace{AVAVA\ldots VAV}_{24AV's}\underbrace{VV\ldots VV}_{52V's}$$

Logo há no máximo 100 – 24 = 76 pessoas da tribo vermelha.

04. [Resposta: 0448]
Solução: No cubo $4\times 4\times 4$, há 8 cubinhos nos vértices (que tem 3 vizinhos), $2\times 12=24$ cubinhos nas arestas (que tem 4 vizinhos), $4\times 6=24$ cubinhos nas faces (que tem 5 vizinhos) e 8 cubinhos no interior do cubo maior (que tem 6 vizinhos). Assim, o cubo maior pesa $8\times 10+24\times 8+24\times 6+8\times 4=448$ g.

05. [Resposta: 0225]
Solução: Há $9 \times 9 \times 9 = 729$ números de três algarismos não nulos. Destes, $9 \times 8 \times 7 = 504$ tem os três algarismos distintos. Portanto, há $729 - 504 = 225$ números com pelo menos dois algarismos iguais.

06. [Resposta: 0018]
Solução: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ tem os fatores 2, 3 e 5, logo os irmãos de 60 são múltiplos de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Como há $\left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$ múltiplos de 30 menores que 1000, então 60 tem no máximo 32 irmãos. Destes múltiplos, os que tem outros fatores além de 2, 3 e 5 são $7 \cdot 30$, $11 \cdot 30$, $13 \cdot 30$, $14 \cdot 30$, $17 \cdot 30$, $19 \cdot 30$, $21 \cdot 30$, $22 \cdot 30$, $23 \cdot 30$, $26 \cdot 30$, $28 \cdot 30$, $29 \cdot 30$, $31 \cdot 30$ e $33 \cdot 30$. Logo, 60 tem $32 - 14 = 18$ irmãos.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:
a) Para calcular os termos, basta considerar os dígitos das unidades na soma e no resultado. Assim, como os dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$ são 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, então começando por 1, temos: 1, 1 + 4 = <u>5</u>, 5 + 9 = 1<u>4</u>, 4 + 6 = 1<u>0</u>, 0 + 5 = <u>5</u>, 5 + 6 = 1<u>1</u>, 1 + 9 = <u>0</u>, 0 + 4 = <u>4</u>, 4 + 1 = <u>5</u> e 5 + 0 = <u>5</u>, logo os 10 primeiros termos da seqüência são 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5 e 5.
b) Observe que a partir do 11º termo, vamos começar a somar novamente os dígitos 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, já que os dígitos das unidades de $11^2, 12^2, \ldots, 20^2$, são os mesmos dígitos das unidades de $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$. Assim, na soma $1^2 + 2^2 + \cdots + 2011^2$, faremos as somas dos dígitos das unidades de 1^2 a 10^2 $\left\lfloor \frac{2011}{10} \right\rfloor = 201$ vezes e adicionaremos 1 de 2011^2. Assim, o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + \cdots + 2011^2$ é o mesmo algarismo das unidades de $201 \cdot (1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0) + 1 = 201 \cdot 25 + 1 = 5026$, que é 6.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a)
- Apresentou a sequência 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5 e 5: **[+ 5 pontos]**

Item b)
- Percebeu a partir do 11º termo serão somados novamente os dígitos 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, já $11^2, 12^2, \ldots, 20^2$ e $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$ têm os mesmos dígitos das unidades: **[+ 2 pontos]**
- Percebeu que as somas dos dígitos das unidades de 1^2 a 10^2 serão feitas 201 vezes adicionado de 1, obtido de 2011^2: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu, obtendo 6 como resposta: **[+ 1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- No item a), cada elemento da sequência: **[1 ponto]**
- No item b), esquecendo de adicionar 1 e obtendo 5 como resposta: **[3 pontos]**

PROBLEMA 2:

a) Os divisores positivos de 9 menores que 9 são 1 e 3, logo o selo do número 9 é o par (2, 4).

b) Observe que todo número inteiro positivo tem 1 como divisor. Como o número que estamos procurando tem apenas dois divisores menores que ele, 1 terá que ser um desses divisores e como a soma dos dois divisores é 3, então o outro divisor deve ser 2. Como não há outros divisores, então o número que procuramos é uma potência de 2, e para ter apenas dois divisores menores que ele próprio, então o número deve ser 4.

c) Seja n um número com selo (6, m). n possui 7 divisores contando com ele próprio, logo a única possibilidade é que ele seja da forma p^6, com p primo, e m é igual a $1+p+p^2+\cdots+p^5$. Para que m seja mínimo, p terá que ser mínimo, logo $p = 2$ e $m = 1+2+2^2+\cdots+2^5 = 63$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Item a)

- Apresentou 1 e 3, os divisores positivos de 9, menores que 9: **[+ 1 ponto]**
- Concluiu que o selo do número 9 é o par (2, 4): **[+ 1 ponto]**

Item b)

- Percebeu 1 é divisor positivo de todo inteiro positivo: **[+ 1 ponto]**
- Percebeu que, como o número procurado tem dois divisores positivos e um deles é o 1, o outro divisor positivo somente pode ser o 2: **[+ 1 pontos]**
- Concluiu que, sendo o 1 e 2 os únicos divisores positivos menores que o próprio número, então o único positivo nessas condições é o 4: **[+ 1 ponto]**

Item c)

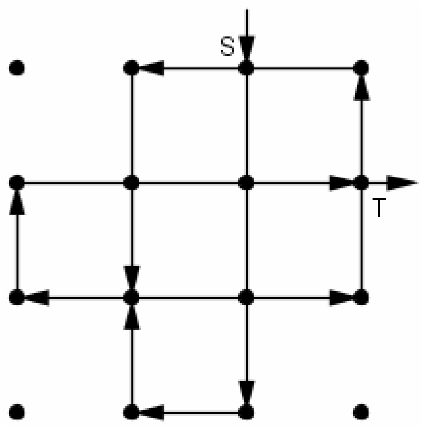
- Percebeu o número procurado tem 7 divisores positivos: **[+ 1 ponto]**
- Percebeu o número procurado, nessas condições, é da forma p^6, com p primo: **[+ 2 pontos]**
- Percebeu que, nessas condições, a soma dos divisores positivos menores que o número procurado é $m = 1+p+p^2+...+p^5$: **[+ 1 ponto]**
- Concluiu, obtendo 63 como resposta: **[+ 1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

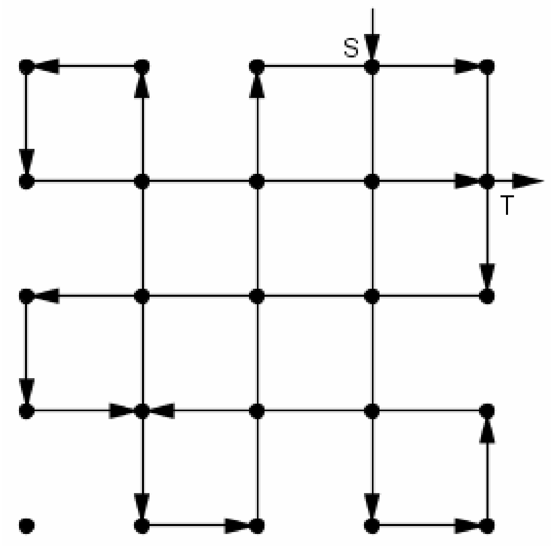
- No item a), só a resposta: **[1 ponto]**
- No item b), só a resposta: **[2 pontos]**
- No item c), só a resposta: **[2 pontos]**

PROBLEMA 3:

a) Observe que para cada prego do geoplano deve entrar e sair o mesmo número de flechas (o barbante ao passar por um prego deve entrar em uma direção e sair em outra), com exceção de onde começa e termina o barbante. Logo nos pregos onde não começa ou termina o barbante temos um número par de flechas, metade entrando e metade saindo. Mas no geoplano 4×4, há 8 pregos com 3 arestas cada (os da borda do geoplano), logo em 6 deles haverá pelo menos uma aresta por onde o barbante não pode passar. No melhor caso, conseguimos fazer com que um quadrado contenha 2 dessas arestas, assim não poderemos completar 3 quadrados. Na figura abaixo temos um exemplo onde 9 – 3 = 6 quadrados são formados, em que o barbante começa no vértice S e termina no vértice T:



b) Uma maneira de construir 11 quadrados com o barbante está descrita abaixo:



CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a)
• Percebeu que no geoplano 4×4, dos 9 possíveis quadrados, não poderemos completar 3. Ou seja, podem ser formados no máximo 9 – 3 = 6 quadrados: **[+ 2 pontos]**
• Exibiu corretamente uma maneira de se obter 6 quadrados com o barbante: **[+ 4 pontos]**
Item b)
• Exibiu corretamente uma maneira de se obter 11 quadrados com o barbante: **[+ 4 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
• No item a), apresentou uma maneira de se obter 6 quadrados mas não justificou por que 6 é o máximo de quadrados que se pode obter: **[4 pontos]**
• No item a), apresentou uma maneira de se obter 5 quadrados: **[2 pontos]**
• No item a), apresentou uma maneira de se obter 4 quadrados: **[1 ponto]**
• No item a), apresentou uma maneira de se obter 3 ou menos quadrados: **[0 ponto]**
• No item b), obteve 11 quadrados, mas com pelo menos 1 imperfeição: **[1 ponto]**
• No item b), obteve corretamente 10 quadrados, mas não conseguiu incluir o 11º: **[1 ponto]**
• No item b), obteve corretamente 9 ou menos quadrados, não conseguindo obter 11: **[0 ponto]**