XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Esmeralda tem uma garrafa com 9 litros de uma mistura que tem 50% de álcool e 50% de água. Ela quer colocar água na garrafa de tal forma que apenas 30% da mistura seja de álcool. Quantos litros de água ela irá colocar?

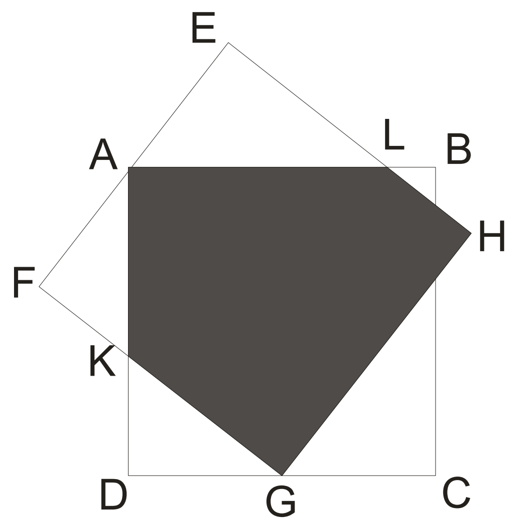
02. Se a, b, c e d são, em alguma ordem, 1, 2, 3 e 4. Qual é o maior valor possível de

$$ab + bc + cd + da?$$

03. Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo em comum. Por exemplo, os números 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, enquanto que 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois 123 e 568 não pertencem à mesma família. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

04. Determine a quantidade de inteiros de dois algarismos que são divisíveis pelos seus algarismos.

05. Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados de lado 48 cm. Sabendo que A é o ponto médio de EF e G é o ponto médio de DC, determine a área destacada em cm^2.



XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O *Teorema Chinês dos Restos* afirma que, dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j. Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando dividido por 3 e 7, respectivamente.

Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

Restos por 7 / Restos por 3	0	1	2	3	4	5	6
0							
1						19	
2							

Qual a soma dos números das casas destacadas?

PROBLEMA 2

Observe:

$$(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$$

Assim, substituindo x por r e por s, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} r^2 - (r+s)r + rs = 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) = 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) = 0 \end{array} \right.$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n$$

Dados $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $S_4 = ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

PROBLEMA 3

Seja N é o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que $AC = 12$ cm e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.

OBS: Baricentro é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

PROBLEMA 4

Um campeonato de xadrez de 7 rodadas, com 4 jogos por rodada, tem 8 participantes, cujas pontuações por jogo são as usuais: um ponto por vitória, meio ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Cada par de jogadores se enfrenta exatamente uma vez.

a) Ao término da terceira rodada, é possível que todos os jogadores tenham pontuações distintas?

b) Se no final do campeonato todos os jogadores têm pontuações distintas qual o menor número possível de pontos obtidos pelo primeiro colocado?