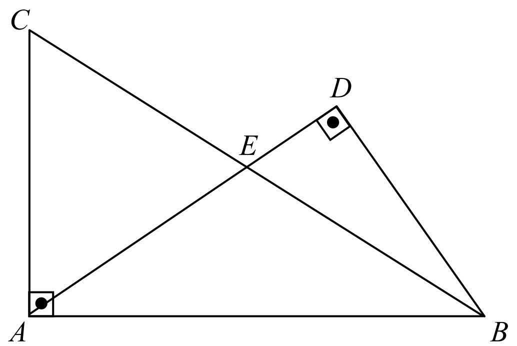
XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Seja N o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine a soma dos algarismos de N.

02. Na figura seguinte, os triângulos ABC e ABD são retângulos em A e D, respectivamente. Sabendo que $AC = 15$ cm, $AD = 16$ cm e $BD = 12$ cm, determine, em cm^2, a área do triângulo ABE.



03. Sejam p, q números reais satisfazendo as relações $2p^2 - 3p - 1 = 0$, $q^2 + 3q - 2 = 0$ e $pq \neq 1$. Ache o valor de $\dfrac{pq + p + 1}{q}$.

04. Em uma cidade arbitrária o prefeito organizou uma rifa com bilhetes numerados de 100 a 999. O prêmio de cada bilhete é determinado pela soma dos algarismos do número do bilhete. Para que ninguém leve três prêmios iguais, estabeleceu-se que quem retirar três bilhetes com as três somas iguais tem direito a um superprêmio. Qual é o menor número de bilhetes que um cidadão deve comprar para ter a certeza de que vai receber um superprêmio?

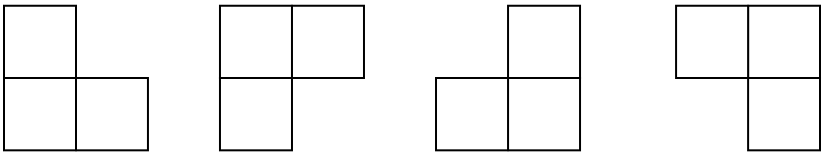
05. Sejam r e s números inteiros. Sabe-se que a equação do segundo grau

$$x^2 - (r + s)x + rs + 2010 = 0$$

tem as duas soluções inteiras. Quantos são os possíveis valores de $|r - s|$?

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Joãozinho deseja colorir um tabuleiro 2×2010 com duas cores A e B. Uma coloração é dita *legal* se não é possível encontrar um L-triminó, como na figura abaixo, com todos os seus quadradinhos de mesma cor. Determine o número de colorações legais.



L – Triminó

Veja abaixo duas colorações que não são legais:

PROBLEMA 2
Determine todos os números primos m e n tais que $0 < m < n$ e os três números

$$2m + n,\ m + 2n \quad \text{e} \quad m + n - 18$$

sejam também primos.

PROBLEMA 3
Chamaremos de *imagem* de um número natural de dois algarismos o número que se obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?

PROBLEMA 4
As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC cortam-se no ponto I. Sabe-se que $AI = BC$ e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.