XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	**25**	**75**	**1**	**53**	**8**

1. [Resposta: 25]

O critério de divisibilidade por 11 nos diz que se o número 33N possui todos os seus algarismos iguais e é divisível por 11, então ele deve possuir um número par da algarismos. O critério de divisibilidade por 3 também nos diz que a soma dos algarismos deve ser múltipla de 3 e isso obriga que a quantidade de algarismos 7 seja divisível por 3. O menor número que cumpre essas condições é 777777, ou seja, N = 777777/33 = 23569.

2. [Resposta: 75]

Pelo teorema de Pitágoras, temos que $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=20$ e que $CB=\sqrt{AC^2+AB^2}=25$. Os triângulos ABC e ADB são semelhantes pois os seus lados são proporcionais e consequentemente temos $\widehat{EAB=EBA}$ e $\widehat{ACB}=90-\widehat{EBA}=90-\widehat{EAB}=\widehat{CAE}.$. Concluímos assim que E é o ponto médio de CB e a área procurada é metade da área do triângulo CAB, ou seja, $\dfrac{15\cdot 20}{4}=75.$

3. [Resposta: 1]

Como p não pode ser zero, podemos dividir a primeira equação por $-p^2$ e obter $\dfrac{1}{p^2}+3\dfrac{1}{p}-2.$

Isto nos diz que as raízes da primeira equação são os inversos das raízes da segunda equação. Como $pq\neq 1.$, p é igual ao inverso da outra raíz da segunda equação que é diferente de q, ou seja, $p=\dfrac{1}{-3-q}$ pois a soma das raízes da segunda equação é igual a –3. Substituindo na expressão procurada:

$$\frac{pq+p+1}{q}=\frac{-q-1+3+q}{3q+q^2}=\frac{2}{3q+q^2}=\frac{2}{2}=1$$

4. [Resposta: 53]

A soma dos dígitos dos bilhetes é no mínimo 1 e no máximo 27. Para as somas 1 e 27 existem apenas dois bilhetes, enquanto que para qualquer outro valor existem pelo menos três bilhetes. Então retirando $1+1+2\times(27-2)+1=53$ iremos escolher pelo menos três números com mesma soma.

5. [Resposta: 8]

Para que as soluções sejam inteiras, o discriminante da equação do segundo grau deve ser o quadrado de um inteiro positivo, digamos t^2. Assim

$$(r+s)^2 - 4rs - 4\times 2010 = t^2$$

$$(r-s)^2 - t^2 = 4\times 2010$$

$$\frac{((r-s)+t)}{2}\times\frac{((r-s)-t)}{2} = 2010$$

Como os números $((r-s)+t)$ e $((r+s)+t)$ possuem a mesma paridade e 2010 é inteiro, concluímos que os termos no produto anterior são inteiros. A cada para de divisores do tipo $\left(d, \frac{2010}{d}\right)$ do número 2010, temos uma solução para t e $|r-s|$ na última equação. Como 2010 possui 16 divisores, o número de soluções é 8.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
A pintura da primeira coluna 2 x 1 do tabuleiro limita o número de maneiras de pintarmos o restante do tabuleiro. Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso: As casas desta coluna são pintadas com a mesma cor. Necessariamente a próxima coluna terá ambas casa da cor oposta à aquela da primeira coluna e. Pela mesma razão, teremos que as cores das colunas do tabuleiro devem ser alternadas. Assim, neste caso, temos apenas 2 pinturas diferentes.

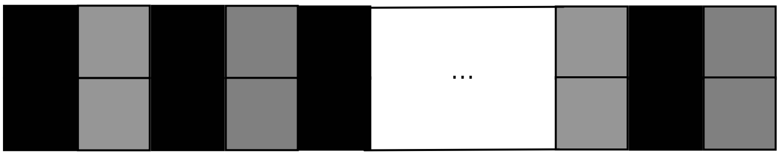

Figura 1

Segundo caso: As casas desta coluna são pintadas com cores diferentes. Necessariamente a próxima coluna é igual à primeira ou tem as cores opostas. O mesmo se passará com as próximas colunas. Como para cada coluna sempre teremos duas escolhas a fazer, incluindo a coluna inicial, temos 2^{2010} pinturas diferentes.

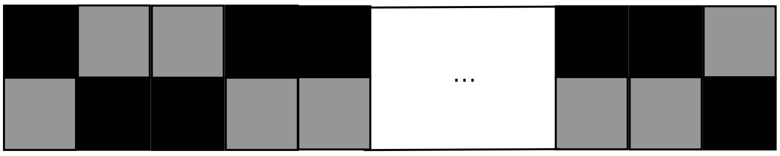

Figura 2

O total de pinturas é: $2+2^{2010}$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Afirmar que a pintura de alguma coluna do tabuleiro determina a pintura de suas colunas vizinhas **[2 pontos]**
Calcular corretamente o número de pinturas do primeiro caso **[3 pontos]**
Afirmar que a pintura de alguma coluna do tabuleiro determina a pintura de suas colunas vizinhas **[2 pontos]**
Calcular corretamente o número de pinturas do primeiro caso **[3 pontos]**
Calcular corretamente o número de pinturas do segundo caso **[5 pontos]**

Pontuação não cumulativa:
Determinar a o número correto de pinturas em algum tabuleiro $2 \times n$ para algum n **[1 ponto]**
Conjecturar o número correto de pinturas **[1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Como os primos $2m + n$ e , $m + 2n$ são maiores que dois, temos que ambos são ímpares e consequentemente $2m+n+m+2n=3m+3n$ é um número par. Assim $m+n$ é par e $m+n-18$ é um primo par, ou seja, dois. O único par de primos (m,n) que cumpre $m+n=20$ e satisfaz o enunciado é $(m,n)=(3,17)$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Mostrar que $2m + n$ e $m + 2n$ são primos ímpares **[1 ponto]**
Mostrar que $m+n$ é um número par. **[3 pontos]**
Mostrar que $m+n=20$ **[2 pontos]**
Encontrar os primos que satisfazem $m+n=20$ e verificar que destes, apenas o par $(m,n)=(3,17)$ é solução do problema. **[4 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

A soma de um número de dois algarismos com a sua imagem é da forma $(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$, onde a e b são seus algarismos. Se $11(a+b)$ é um quadrado perfeito, devemos ter outro fator primo 11 na soma $a + b$. Além disso, como a e b são menores que 10, concluímos que $a + b$ é um múltiplo de 11 menor que 20 e maior que 0, ou seja, é igual à 11. Os pares de dígitos (a,b) que verificam $a+b=11$ são:

$(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3)$ e $(9,2)$.

Portanto, existem 8 números de dois algarismos que cumprem o enunciado.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Calcular a soma de um número de dois algarismos com a sua imagem e obter a expressão $11(a+b)$ **[2 pontos].**
- Afirmar que $a + b$ deve ser múltiplo de 11. **[2 pontos].**
- Mostrar que $a + b$ é igual a 11 **[3 pontos].**
- Calcular o número de pares de dígitos que verificam $a + b = 11$ **[3 pontos]** .

Segunda Solução.
Caso o aluno teste **todos** os números entre 10 e 99 e encontre os oito números. **[10 pontos].**

Pontuação não cumulativa:

- Afirmar que a soma de um número de dois dígitos com a sua imagem é um múltiplo de 11. **[1 ponto]**
- Achar todos os oito números sem nenhum tipo de justificativa. **[1 ponto]**
- Afirmar que o único quadrado perfeito múltiplo de 11 menor que 200 é 121. **[2 pontos]**

PRIMEIRA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Seja N o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\angle ACD$ com o lado AB. Pelo caso $A.L.A$, os triângulos $\triangle NCA$ e $\triangle ADC$ são congruentes. Consequentemente $NC = AD = BC$.

Pelo teorema do ângulo externo, $\angle BNC = NAC + ACN = \angle NCB$. portanto $BN = BC = NC$ e $\triangle BNC$ é equilátero. Daí $\angle ABC = 60, \angle BCA = 80$ e $\angle BAC = 40$

SEGUNDA SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Lema 1: Se $\triangle ABC$ é um triângulo com $\angle ACB = 2\angle BAC$ então $a(a+b) = c^2$.

Lema 2: A bissetriz do vértice C do triângulo $\triangle ABC$ tem comprimento $\dfrac{2ab\cos\frac{\angle ACB}{2}}{a+b}$

Sejam $\alpha = \angle BAD$ e P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\angle C$ com o lado AB. Pelo segundo lema temos $\dfrac{cb}{a+b} = \dfrac{2ab\cos 2\alpha}{a+b}$ e daí $c = 2a\cos 2\alpha$. Pelo lema 1 temos $a(a+b) = c^2 = 4a^2\cos^2 2\alpha$ e daí $b = a(4\cos^2 2\alpha - 1)$. Como $AD = BC$ temos que $p - a = AD\cos\alpha = a\cos\alpha$ e daí $a + b + c = 2a(\cos\alpha + 1)$. Substituindo os valores encontrados anteriormente temos

$$a + a(4\cos^2 2\alpha - 1) + 2a\cos 2\alpha = 2a(\cos\alpha + 1) \Rightarrow$$

$$1 + 2\cos 4\alpha + 1 + 2\cos 2\alpha = 2\cos\alpha + 2 \Rightarrow$$

$$\cos 4\alpha + \cos 2\alpha = \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha(1 - 2\cos 3\alpha) = 0 \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

E consequentemente $\angle ABC = 3\alpha = 60$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

1ª Solução:

- Traçar NC e usar a congruência $A.L.A$ – **[3 pontos]**
- Mostrar que $\triangle BNC$ é equilátero – **[3 pontos]**
- Concluir – **[4 pontos]**

2ª Solução:

- Citar algum dos lemas e não provar: **[1 ponto]**
- Citar e demonstrar cada um dos lemas: **[2 pontos]**
- Concluir o problema com a idéia trigonométrica: **[6 pontos]**