XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A
Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	01	02	03	04	05
Resposta	**3**	**17 ou 20**	**288**	**6**	**100**

1. [Resposta: 3]

Utilizando o produto das raízes, obtemos:
$ab = b$
$a = 1$
pois $b \neq 0$. Utilizando a soma das raízes, obtemos:
$a + b = -a$
$1 + b = -1$
$a - b = 3$

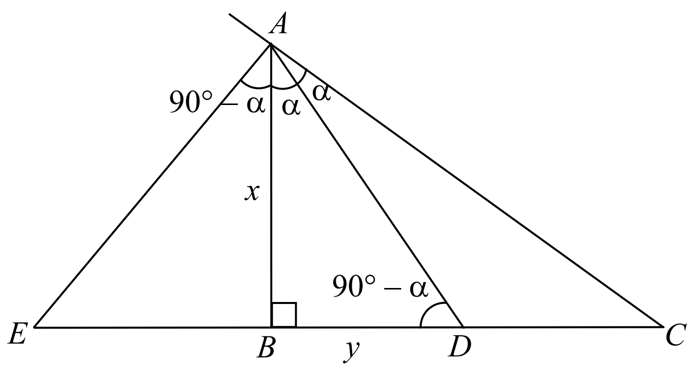
2. [Resposta: 17 ou 20]

Todos os números terminados em 2, 4, 5 e 6 são compostos. Existem $4 \times 4 = 16$ tais números. Dos números terminados em 3, apenas 63 é composto.

O enunciado apresenta uma ambiguidade. Outra interpretação seria considerar os números de dois algarismos constituídos por dois números distintos do conjunto $\{2,3,4,5,6\}$. Nesse caso, a resposta correta é $5 \times 4 = 20$.

Ambas as respostas devem ser consideradas corretas.

3. [Resposta: 288]



Da semelhança dos triângulos ΔABD e ΔEAD obtermos:

$$\frac{360}{480}=\frac{y}{x} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x$$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔABD, temos:

$$x^2+y^2=360^2$$

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=(360)^2$$

$$x=288$$

4. [Resposta: 6]

Um número de dois dígitos (*ab*) elevado à quarta potência possui a seguinte forma:

$$(10a+b)^4=10^4a^4+4.10^3a^3b+6.10^2a^2b^2+4.10ab^3+b^4$$

Assim, os últimos dois dígitos são determinados por $4.10ab^3+b^4$. Qualquer número ímpar diferente de 5 elevado à quarta potência termina em 1. Logo, temos quatro possibilidades para *b*:

Se $b=1$, para o número $40a+1$ terminar em 01devemos ter $a=5$.
Se $b=3$, para o número $1080a+81$ terminar em 01devemos ter $a=4$ ou $a=9$.
Se $b=7$, para o número $13720a+2401$ terminar em 01devemos ter $a=5$.
Se $b=9$, para o número $29160a+6561$ terminar em 01devemos ter $a=4$ ou $a=9$.

5. [Resposta: 100]

Como $B\widehat{D}C$ mede 30° e $B\widehat{A}C$ é 60°, o ponto *D* está no círculo de centro *A* e raio *AB*. Como o triângulo *ACD* é isósceles com ângulo da base igual a 70, temos $C\widehat{A}D=40°$ e $B\widehat{A}D=100°$

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
a) Uma possível sequência de operações é:

$$5 \xRightarrow{2+3} 6 \xRightarrow{3+3} 9 \xRightarrow{4+5} 20 \xRightarrow{19+1} 19$$

b) Perceba que se é possível obtermos o número n também é possível obtermos o número $n-1$ com a operação $n \xRightarrow{(n-1)+1} n-1$ e consequentemente poderemos obter todos os inteiros positivos menores que $n-1$ repetindo essa operação. Então é suficiente obtermos um inteiro maior que 2011 começando em 5. Uma possível sequência de operações para isso seria:

$$5 \xRightarrow{2+3} 6 \xRightarrow{4+2} 8 \xRightarrow{4+4} 16 \xRightarrow{8+8} 64 \xRightarrow{32+32} 1024 \xRightarrow{1022+2} 2044.$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

a) Exibir uma sequência correta de operações que obtenha o número 19. **[3 pontos].**
b) Mostrar que é possível obter números maiores que 2011. **[3 pontos].**
Mostrar que é possível obter $n-1$ a partir de n. **[3 pontos]**
Concluir o problema. **[1 pontos]**

Pontuação não cumulativa:
b) Exibir uma sequência correta de operações que obtenha o número 2011. **[7 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Somando as três equações obtemos: $2ab + 2bc + 2ca = 484$
Daí,
$ab = 242 - c(a+b) = 72$,
$bc = 242 - a(b+c) = 90$,
$ca = 242 - b(a+c) = 80$.
Logo, $(abc)^2 = 72.90.80$ e $abc = 720$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Obter a soma $ab + bc + ca$. **[3 pontos]**
Calcular ab, bc, ca. **[3 pontos]**
Calcular o valor $(abc)^2$. **[4 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Seja $d = mdc(a, b)$. Podemos reescrever a equação como:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+1=\frac{33}{d}.$$

O lado esquerdo é uma soma de números inteiros logo, d divide 33. Agora temos que $mdc(a/d, b/d) = mdc(a/d, 33/d-1) = mdc(b/d, 33/d-1) = 1$. Fixado d, é suficiente encontrarmos os pares de inteiros positivos (x, y) com $mdc(x, 33/d-1)=1$ tais que $x+y = 33/d-1$ pois daí obteremos também que $mdc(y, 33/d-1)=1$ e que $(a, b) = (dx, dy)$ é solução. Vejamos então as possibilidades para d:

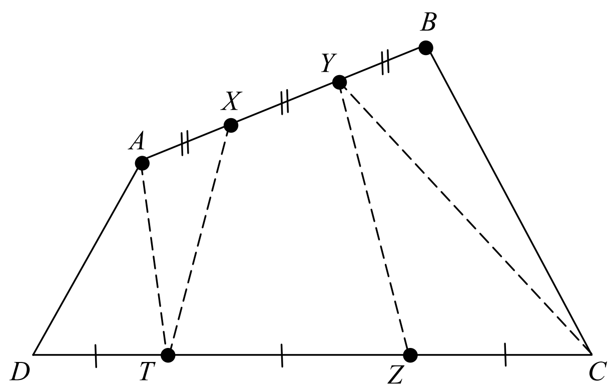
Para $d = 1$ e $x+y = 32$, temos 16 soluções pois basta escolhermos x ímpar.
Para $d = 3$ e $x+y = 10$, temos 4 soluções pois x não pode ser par nem múltiplo de 5.
Para $d = 11$ e $x+y = 2$, temos 1 solução apenas.
Não podemos ter $d = 33$ pois a e b são positivos.

Logo, existem 21 pares de soluções.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Mostrar que $mdc(a, b)$ divide 33. **[2 pontos]**
Dividir nos casos $d = 1$, $d = 3$, $d = 11$. **[2 pontos]**
Encontrar o número de pares (a, b) quando $d = 1$. **[2 pontos]**
Encontrar o número de pares (a, b) quando $d = 3$. **[2 pontos]**
Encontrar o número de pares (a, b) quando $d = 11$. **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:



Temos as seguintes relações de áreas:

$$[ADT]+[BYC]=\frac{1}{3}([ADC]+[ABC])=\frac{1}{3}([ABCD])=20.$$

Portanto a área do quadrilátero $[ATCY]$ é igual à 40. Além disso,

$$[ATX]+[YZC]=\frac{1}{2}([ATY]+[YTC])=\frac{1}{2}([ATCY])=20.$$

Consequentemente, $[XTZY]=[ATCY]-[ATX]-[YZC]=20.$

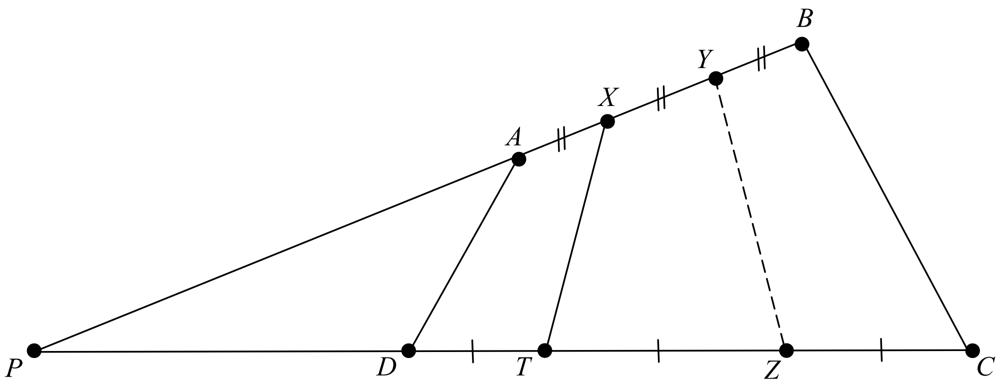
Segunda Solução:
Sejam P a interseção de AB e DC , $a = PA$, $b = PD$, $x = AX$ e $y = DT$. Temos:

$2[ABCD]/sen\, APD = (a+3x)(b+3y) - ab = 9xy + 3bx + 3ay$

$2[XYZT]/sen\, APD = (a+2x)(b+2y) - (a+x)(b+y) = bx + ay + 3xy$

Logo a área do quadrilátero $[XYZT]$ é um terço da área do quadrilátero $[ABCD]$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:



CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira Solução

Encontrar o valor da soma de áreas [*ADT*] + [*BCY*]. **[4 pontos]**
Encontrar o valor da soma de áreas [*AXT*] + [*CYZ*]. **[4 pontos]**
Concluir que $[XTZY] = [ATCY] - [ATX] - [YZC] = 20$. **[2 pontos]**

Segunda Solução:

Calcular a área do quadrilátero [*ABCD*] em função dos segmentos *x*,*y*,*b* e *a* e de $\text{sen}\ \widehat{\text{APD}}$. **[4 pontos]**
Calcular a área do quadrilátero [*XYZT*] em função dos segmentos *x*,*y*,*b* e *a* e de $\text{sen}\ \widehat{\text{APD}}$. **[4 pontos]**
Concluir que a área do [*XYZT*] é um terço da área do [*ABCD*]. **[2 pontos]**