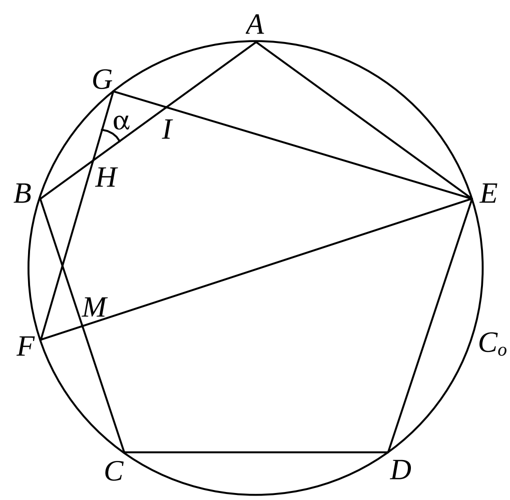
XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. O par ordenado (83;89) é chamado de *par centenário* porque 83 + 8 + 9 = 89 + 8 + 3 = 100, isto é, a soma de cada número com os dígitos do outro número é 100. Quantos são os pares centenários?

02. Na figura a seguir, o pentágono regular *ABCDE* e o triângulo *EFG* estão inscritos na circunferência C_o, e *M* é ponto médio de *BC*. Para qual valor de α, em graus, os triângulos *EFG* e *HIG* são semelhantes?



03. Esmeralda e Jade correm em sentidos opostos em uma pista circular, começando em pontos diametralmente opostos. O primeiro cruzamento entre elas ocorre depois de Esmeralda ter percorrido 200 metros. O segundo cruzamento ocorre após Jade ter percorrido 350 metros entre o primeiro e o segundo ponto de encontro. As velocidades das moças são constantes.
Qual é o tamanho da pista, em metros?

04. Qual a maior quantidade de lados que pode ter uma secção determinada por um plano em um octaedro regular?

05. Ao jogarmos uma certa quantidade de dados cúbicos com faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obtermos soma dos pontos 2006 é igual à probabilidade de obtermos soma dos pontos *S*. Qual é o menor valor possível de *S*?

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Seja n inteiro positivo. De quantas maneiras podemos distribuir $n + 1$ brinquedos distintos para n crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

PROBLEMA 2

Encontre todos os pares de inteiros positivos $(a;b)$ tais que $(a + 1)(b + 1)$ é múltiplo de $ab + 1$.

PROBLEMA 3

No triângulo ABC tem-se $AB = 4$, $AC = 3$ e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60^o. Seja D o ponto de intersecção entre a reta perpendicular a AB passando por B e a reta perpendicular a AC passando por C. Determine a distância entre os ortocentros dos triângulos ABC e BCD.

PROBLEMA 4

A seqüência F_n é definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Encontre todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $F_m \cdot F_n = mn$.