XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Um trapézio isósceles *ABCD*, com lados paralelos *AB* e *CD*, é tal que a diagonal *BD* mede 100 m e o ângulo $B\widehat{D}C$ mede 30°. Seja *S* a área do trapézio em m^2. Determine $S \cdot \sqrt{3}$.

02. Se *x* é um número real, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a *x*. Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor p \rfloor = 3$ e $\lfloor -2{,}1 \rfloor = -3.$ Calcule o valor da soma

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{3} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{4} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[4]{2008} \rfloor.$$

03. Um inteiro positivo *n* é chamado de *auto-replicante* se os últimos dígitos de n^2 formam o número *n*. Por exemplo, 25 é auto-replicante pois $25^2 = 625.$ Determine a soma de todos os números auto-replicantes com exatamente 4 dígitos (isto é, números auto-replicantes *n* com $1000 \le n \le 9999$).

04. Quantas permutações de 1, 2, 3, ..., 9 há com a propriedade de que, para todo $1 \le i < 9,$ os números que aparecem entre *i* e *i* + 1 (onde *i* pode aparecer tanto antes como depois de *i* + 1) são todos menores do que *i*? Por exemplo, 976412358 é uma permutação com esta propriedade.

05. Suponha que $a \in \mathbb{R}$ é raiz de algum polinômio não-nulo com coeficientes racionais. O *polinômio minimal* de a é o polinômio de menor grau *m*(*x*) tal que:

- $m(a) = 0;$
- $m(x)$ é Mônico (isto é, o seu coeficiente líder é 1) e todos os seus coeficientes são racionais.

Por exemplo, o polinômio minimal de $\sqrt{2}$ é $x^2 - 2.$ Determine o produto dos coeficientes não nulos do polinômio minimal de $\sqrt[3]{-27 + 5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27 + 5\sqrt{33}}.$

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Determine todos os inteiros positivos *m* e *n* tais que

$$m^2 + 161 = 3^n$$

PROBLEMA 2

Determine a quantidade de funções $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ tais que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

PROBLEMA 3

Um trapézio *ABCD*, com lados paralelos *AB* e *CD*, está inscrito em uma circunferência de raio 25. Sabe-se que *CD* é um diâmetro e a altura desse trapézio é 24. Seja *E* um ponto no arco menor determinado por *A* e *B* e sejam *F* e *G* os pontos de interseção de *ED* e *EC* com *AB*, respectivamente. Calcule $\dfrac{AF \cdot BG}{FG}$.

PROBLEMA 4

Em uma matriz 2008×2008 o elemento na linha *i* e coluna *j* é o número *i* + *j* (as linhas e colunas são numeradas de 1 a 2008). Escolhem-se 2008 elementos desta matriz de modo que não haja dois elementos escolhidos numa mesma linha ou coluna. Os elementos são multiplicados. Qual o menor produto que se pode obter desta forma?