XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O *Teorema Chinês dos Restos* afirma que, dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j. Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando dividido por 3 e 7, respectivamente.
Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

Restos por 7 / **Restos por 3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0							
1						19	
2							

Qual a soma dos números das casas destacadas?

02. No triângulo retângulo ABC, $\angle A = 90°$, $AB = 5$cm e $BC = 9$cm. Se I é o incentro de ABC, determine o comprimento do segmento CI.

03. Seja c a maior constante real para a qual

$$x^2 + 3y^2 \geq c \cdot (x^2 + xy + 4y^2).$$

para todos x, y reais.

Determine o inteiro mais próximo de $2009 \cdot c$.

04. No programa de auditório *Toto Bola*, o apresentador *Ciço Magallanes* dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da platéia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. A máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro é igual a $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de $m + n$.

05. Determine o maior inteiro n menor que 10000 tal que $2^n + n$ seja divisível por 5.

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Determine a quantidade de números $n = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, de seis algarismos distintos, que podemos formar utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

i) $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$;

ii) n é divisível por 9.

PROBLEMA 2

Encontre todos os inteiros $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$4 \cdot 3^a = 11 + 5^b$$

PROBLEMA 3

Para cada inteiro positivo n, seja $A_n = \{x \in R_+; x \cdot \lfloor x \rfloor = n\}$, em que R_+ é o conjunto dos reais positivos e $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Determine a quantidade de elementos do conjunto

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{2009}.$$

PROBLEMA 4

No triângulo ABC, temos $\angle A = 120°$ e $BC = 12$ cm. A circunferência inscrita em ABC tangencia os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E. Sejam K e L os pontos onde a reta DE intersecta a circunferência de diâmetro BC. Determine a distância entre os pontos médios dos segmentos BC e KL.