XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

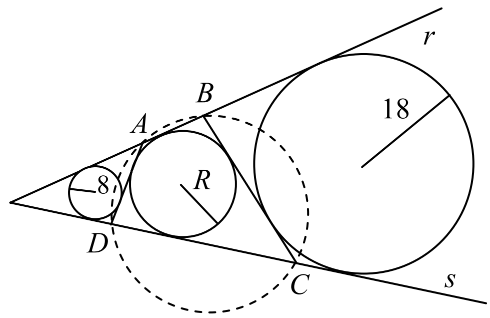
01. Seja N o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine a soma dos algarismos de N.

02. Sejam r e s números inteiros. Sabe-se que a equação do segundo grau

$$x^2 - (r+s)x + rs + 2010 = 0$$

tem as duas soluções inteiras. Quantos são os possíveis valores de $|r - s|$?

03. Na figura a seguir, as três circunferências em traço contínuo são tangentes às retas r e s e a circunferência tracejada passa pelos pontos A, B, C e D. Além disso, a circunferência menor é tangente também a AD e a circunferência maior é também tangente a BC. Se os raios das circunferências externas ao quadrilátero $ABCD$ são 8 e 18, calcule o raio R da circunferência inscrita em $ABCD$.



04. Cada uma das oito casas de um retângulo de duas linhas e quatro colunas é pintada de uma entre três cores. Uma coluna é chamada de *corte* se as suas duas casas são da mesma cor. De quantas maneiras é possível pintar o retângulo de modo que haja exatamente um corte?

05. Calcule

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)\ldots(32^4+32^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)\ldots(31^4+31^2+1)}$$

XXXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC cortam-se no ponto I. Sabe-se que $AI = BC$ e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

PROBLEMA 2
Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

PROBLEMA 3
Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 77 \\ xy + yz + zx + xyz = 946 \end{cases}$$

sendo $x \le y \le z$ inteiros não negativos.

PROBLEMA 4
Uma mesa de bilhar tem o formato de um quadrado $ABCD$. SuperPablo tem uma missão especial: ele deve dar uma tacada em uma bola de bilhar, inicialmente colocada no vértice A, de modo que, após bater exatamente 2010 vezes nos lados do quadrado, a bola chegue, pela primeira vez, a um vértice do quadrado.

Quantos são os possíveis valores do ângulo formado pelo lado AB com a trajetória inicial da bola?

Observação: ao bater nos lados do quadrado, a bola sofre reflexão perfeita, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Suponha também que a bola seja um ponto.