XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	25	8	12	2592	1057

01. [Resposta: 0025]
Solução: Queremos o menor múltiplo de 33 formado apenas por algarismos 7. Teremos

$$33 \cdot N = 7777...77, \text{ com } k \text{ algarismos } 7.$$

Para ser múltiplo de 33, deve ser múltiplo de 11 e de 3. Assim, k deve ser par (pelo critério de divisibilidade por 11) e, também, k deve ser múltiplo de 3, pois a soma dos algarismos de $33N$ é $7k$. Logo, o menor N procurado satisfaz $33 \cdot N = 777.777$, o que nos dá $N = 23.569$. A soma dos algarismos de N é $2 + 3 + 5 + 6 + 9 = 25$.

02. [Resposta: 0008]
Solução: A expressão $x^2 - (r + s)x + rs$ pode ser escrita como $(x - r)(x - s)$. Logo, devemos ter

$$(r - x)(x - s) = 2010.$$

Fazendo $r - x = a$ e $x - s = b$, a e b com o mesmo sinal, devemos encontrar $a + b = r - s$ sabendo que a e b são inteiros positivos tais que $a \cdot b = 2010$. O número de pares $\{a, b\}$ que satisfazem esta equação é igual a oito, sendo

$$\{a, b\} = \{1, 2010\}, \{2, 1005\}, \{3, 670\}, \{5, 402\}, \{6, 335\}, \{10, 201\}, \{15, 134\}, \{30, 67\}.$$

03. [Resposta: 0012]
Solução: Seja O o ponto de interseção entre as retas AB e CD. Veja que os triângulos ODA e OBC são semelhantes, pois $\angle OAD = 180° - \angle DAB = \angle BCA$. Logo, podemos igualar a razão de semelhança à razão entre os raios das circunferências inscritas, bem como das ex-inscritas, obtendo:

$$\frac{8}{R} = \frac{R}{18} \Leftrightarrow R^2 = 144 \Leftrightarrow R = 12.$$

04. [Resposta: 2592]
Solução: Em primeiro lugar, escolhemos a coluna que conterá o **corte.** Isso pode ser feito de 4 modos. Em seguida, escolhemos a cor das casas do corte, o que pode ser feito de 3 modos. Ficamos, então, com três colunas restantes para preencher. Preencheremos primeiramente as casas da primeira linha. Temos 3 modos de colorirmos cada casa da primeira linha, ou seja, 3^3 modos. Finalmente, resta-nos colorir as casas da segunda linha, o que pode ser feito de 2^3 modos, já que as cores das casas dessas colunas devem ser diferentes das cores das casas imediatamente superiores. O total de colorações é $4 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 2592$.

05. [Resposta: 1057]

Solução: Em primeiro lugar, veja que cada termo do produto é do tipo $\dfrac{(k+1)^4+(k+1)^2+1}{k^4+k^2+1}$.

Além disso, podemos escrever

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Assim, ficamos com $\dfrac{(k+1)^4+(k+1)^2+1}{k^4+k^2+1}=\dfrac{[(k+1)^2-(k+1)+1].[(k+1)^2+(k+1)+1]}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$. Agora, veja que $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$ e $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$. Logo, a última expressão fica

$$\frac{(k+1)^4+(k+1)^2+1}{k^4+k^2+1}=\frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}.$$

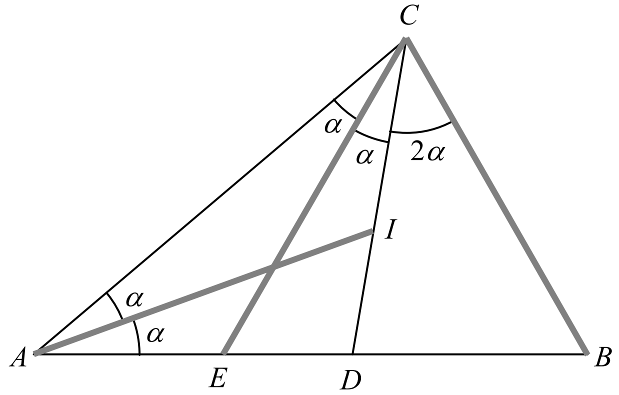
Logo, o produto pedido é igual a

$$\frac{2^2+2+1}{0^2+0+1}\cdot\frac{4^2+4+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{6^2+6+1}{4^2+4+1}\cdot\ldots\cdot\frac{32^2+32+1}{30^2+30+1}=32^2+32+1=1057\ .$$

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

Seja $\alpha = m(I\hat{A}C)$. Então $m(I\hat{C}A) = 2\alpha$. Prolongue a reta CI até encontrar o lado AB em D. Como $m(C\hat{A}D) = 2m(I\hat{A}C) = 2\alpha$, o triângulo ACD é isósceles e, portanto, suas bissetrizes AI e CE são congruentes.



Logo, sendo $m(C\hat{E}B) = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = m(E\hat{C}B)$ e $CE = AI = BC$, o triângulo BCE é equilátero. Assim, $m(A\hat{B}C) = 60^\circ$.

Outra solução:

Considere a mesma figura acima. Aplicando a lei dos senos nos triângulos ACI e ABC, obtemos

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha - 2\alpha)} = \frac{AI}{\operatorname{sen} 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{AI} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

$$\text{e } \frac{AC}{\operatorname{sen}(180^\circ - 2\alpha - 4\alpha)} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\operatorname{sen} 6\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Como $AI = BC$ e $0 < 3\alpha < 6\alpha < 180º$, $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen} 6\alpha \Leftrightarrow 3\alpha + 6\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 20^\circ$. Logo $m(A\hat{B}C) = 180^\circ - 6\alpha = 60^\circ$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve uma equação (trigonométrica ou não) que permita calcular α: **[+ 7 pontos]**
- Encontrou α: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[+ 1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Construiu o triângulo ACD **E** notou que ele é isósceles: **[2 pontos]**
- Construiu o triângulo ACD **E** notou que ele é isósceles **E** percebeu que o triângulo BCE é equilátero: **[7 pontos]**
- Somente resposta: **[0 ponto]**
- Encontrou as medidas dos ângulos medindo-os em boas figuras: **[0 ponto]**

PROBLEMA 2:

Note que Diamantino pode jogar futebol no máximo 5 vezes; caso contrário ele necessariamente joga dois dias seguidos. Suponha que ele joga k dias. Então os k dias em que ele joga devem ser imediatamente seguidos por dias em que ele não joga. Assim, acrescentando um dia ao período, podemos dividir os 11 dias em k blocos de dois dias e $11 - 2k$ blocos de um dia. Podemos permutar os $k + 11 - 2k = 11 - k$ blocos de $\frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} = \binom{11-k}{k}$ maneiras.

Assim, o total de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar é

$$\binom{11-0}{0}+\binom{11-1}{1}+\binom{11-2}{2}+\binom{11-3}{3}+\binom{11-4}{4}+\binom{11-5}{5}=1+10+36+56+35+6=144.$$

Outra solução:

Seja a_n o número de maneiras de Diamantino escolher os dias em que vai jogar entre n dias. Se ele jogar no dia n ele não pode ter jogado no dia $n - 1$, mas não há restrições aos demais $n - 2$ dias; assim, nesse caso há a_{n-2} maneiras de escolher os dias em que vai jogar; se ele não jogar no dia n não há restrições aos demais $n - 1$ dias, então nesse caso há a_{n-1} maneiras de escolher os dias.

Assim, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ (a única opção é não jogar) e $a_1 = 2$ (ele joga ou não no único dia). Dessa forma, podemos encontrar os valores de a_n a partir dos anteriores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Logo Diamantino pode escolher os dias de 144 maneiras.

Comentários:

- Temos que $a_n = F_{n+2}$, em que F_n é a famosa sequência de Fibonacci (clique no link para saber algumas de suas muitas propriedades!)
- Comparando e generalizando as duas soluções você pode obter a identidade

$$F_{n+1}=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots$$

que soma as outras diagonais do triângulo de Pascal.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira solução

- Dividiu em seis casos: **[2 pontos]**
- Obteve a resposta nos seis casos ou obteve uma fórmula: **[+ 6 pontos (1 ponto por caso)]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

Segunda solução

- Obteve a recursão: **[8 pontos]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Qualquer maneira estruturada de dividir o problema em casos: **[2 pontos]**
- Uma lista de casos sem ter uma divisão estruturada **explícita na solução**: **[0 ponto]**
- Listou todos os casos explicitamente corretamente: **[10 pontos]**
- Tentativas de listar todos os casos explicitamente com algum erro: **[0 ponto]**

PROBLEMA 3:

Observando que $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$,

$$\begin{cases} x+y+z=77 \\ xy+yz+zx+xyz=946 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=77 \\ 1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz=1024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)+(1+y)+(1+z)=80 \\ (1+x)(1+y)(1+z)=1024=2^{10} \end{cases}$$

Como x, y e z são inteiros não negativos, $1 + x$, $1 + y$ e $1 + z$ são potências de 2. Considerando que $80 = 2^6 + 2^4 > 3 \cdot 2^4$, $80 < 2^7$ e $x \le y \le z$, temos $2^4 < 1 + z < 2^7$, ou seja, $1 + z = 2^5 = 32$ ou $1 + z = 2^6 = 64$.

Se $1 + z = 32$, temos $1 + x + 1 + y = 48$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^5 = 32$. Mas, sendo $1 + x$ e $1 + y$ potências de 2 com soma par, temos $1 + x \ge 2$ e, portanto, $1 + y \le 16$. Então $1 + x \le 16$ e $1 + x + 1 + y \le 32 < 48$, e não há soluções nesse caso.

Se $1 + z = 64$, temos $1 + x + 1 + y = 16$ e $(1 + x)(1 + y) = 2^4 = 16$. Desse modo, $1 + x$ e $1 + y$ são soluções da equação do segundo grau $t^2 - 16t + 16 = 0$, que não tem soluções inteiras.

Logo não há soluções.

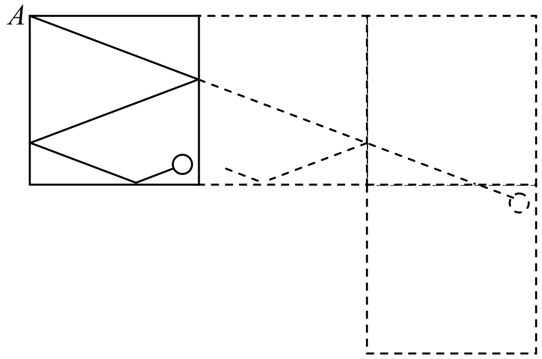
CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Descobriu que $1 + x$, $1 + y$ e $1 + z$ são potências de 2: **[4 pontos]**
- Limitou uma das variáveis (como, por exemplo, $2^4 < 1 + z < 2^7$ ou $x \le 7$): **[+ 4 pontos]**
- Concluiu: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:

- Afirmou que não há soluções sem demonstração: **[0 ponto]**

PROBLEMA 4:
Como a bola sofre reflexão perfeita, ao refletir a mesa em relação a cada lado em que a bola bate obtém-se uma linha reta. Repetindo as reflexões obtemos a seguinte figura, em que a trajetória da bola é reta:



Assim, o problema é equivalente a encontrar uma trajetória em um retângulo de dimensões inteiras m e n, dividido em mn quadradinhos unitários, que começa em um vértice, termina no vértice oposto e corte os lados dos quadradinhos unitários 2010 vezes, sem passar por nenhum dos vértices internos dos quadrados unitários (pois se passasse, a bola chegaria a um vértice do quadrado antes de 2010 rebatidas nos lados).

Como a bola deve atravessar $m - 1$ quadrados em um sentido e $n - 1$ no outro, $m - 1 + n - 1 = 2010 \Leftrightarrow m + n = 2012$; como a bola não passa por vértices do quadrado unitário, $\text{mdc}(m, n) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(m, m + n) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(m, 2012) = 1$. Assim, o número pedido é a quantidade de números coprimos com 2012 menores do que 2012, que é $\phi(2012) = \phi(2^2 \cdot 503) = 2012\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{503}\right) = 1004$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve $m + n = 2012$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$: **[6 pontos]**
- Obteve que a resposta é $\phi(2012)$: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as acima e nem entre si.

- Obteve pelo menos cinco soluções: **[3 pontos]**
- Somente a resposta: **[1 ponto]**