XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

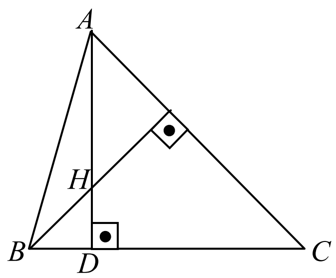
Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	0037	3600	0237	1005	0061

01. [Resposta: 0037]
Solução: Como m é inteiro positivo, temos $x^2 - 5x < 2011$. Sendo x inteiro e $47^2 - 5 \cdot 47 < 2011 < 48^2 - 5 \cdot 48$, devemos ter $x^2 - 5x < 2011 \Leftrightarrow x \le 47$. Assim, o menor valor de m é $2011 - (47^2 - 5 \cdot 47) = 37$.

02. [Resposta: 3600]
Solução: As consoantes de FELICIDADE são F, L, C, D, D e as vogais são E, I, I, A, E. As posições das vogais são as pares ou as ímpares, as consoantes podem se permutar entre si de $\dfrac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = 60$ maneiras e as vogais podem se permutar de $\dfrac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = 30$ maneiras. Assim, o total de anagramas alternados de FELICIDADE é $2 \cdot 60 \cdot 30 = 3600$.

03. [Resposta: 0237]
Solução: Seja H o ortocentro do triângulo ABC. Então $BD = HD = 10$ cm. Então o triângulo retângulo BDH é isósceles e, portanto, $m(H\hat{B}D) = 45^\circ$. Logo, considerando o triângulo retângulo de hipotenusa BC, temos $m(\hat{C}) = 90^\circ - m(H\hat{B}D) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Assim, $m(D\hat{A}C) = 90^\circ - m(\hat{C}) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ e $m(B\hat{A}D) = m(\hat{A}) - m(D\hat{A}C) = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Enfim, $m(\hat{B}) = 90^\circ - m(B\hat{A}D) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



Assim, $AD = BD\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 10\sqrt{3}$ cm e $CD = AD = 10\sqrt{3}$ cm. Portanto a área de ABC é $\dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{(10+10\sqrt{3})10\sqrt{3}}{2} = 150 + 50\sqrt{3} \cong 150 + 50 \cdot 1{,}732 = 236{,}6$ cm^2, cujo valor inteiro mais próximo é 237 cm^2.

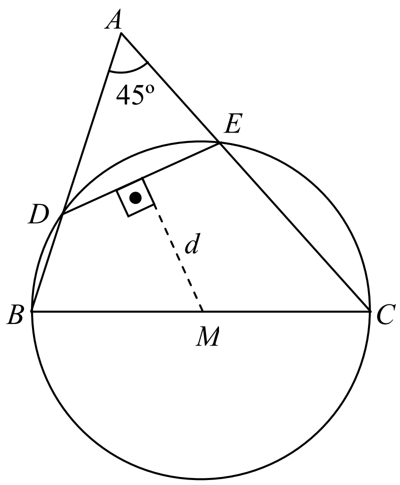
04. [Resposta: 1005]
Solução: O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos dois números é múltiplo de seu mdc. Logo queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \le 2011 \Leftrightarrow d \le 1005$. Como 1005 e $2 \cdot 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.

05. [Resposta: 0061]
Solução: A condição $(f(x)+f(y)+f(z))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2 + (f(z))^2$ para $x + y + z = 0$ é equivalente a $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}+\frac{1}{f(-x-y)}=0$. Como $f(-x) = -f(x)$, sendo $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ temos $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}-\frac{1}{f(x+y)}=0 \Leftrightarrow g(x+y)=g(x)+g(y)$.

Fazendo $y = x$, obtemos $g(2x) = 2g(x)$. Fazendo $y = 2x$, obtemos $g(3x) = g(2x) + g(x) = 2g(x) + g(x) = 3g(x)$ e, indutivamente, prova-se que $g(nx) = n \cdot g(x)$ para n inteiro positivo. Fazendo $x = 1$ e $n = 2011$, obtemos $g(2011) = 2011g(1)$. Como $g(2011)=\frac{1}{f(2011)}=1$, temos $g(1)=\frac{g(2011)}{2011}=\frac{1}{2011}$. Enfim, fazendo $x = 1$ e $n = 33$, temos $g(33)=33\cdot g(1)= 33\cdot\frac{1}{2011}=\frac{33}{2011}$. Logo $f(33)=\frac{1}{g(33)}=\frac{2011}{33}$. Como $2011 = 33 \cdot 60 + 31$, o inteiro mais próximo de $f(33)$ é 61.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:



Temos $m(B\hat{A}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CB}) - m(\overset{\frown}{DE})}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 45^\circ = 180^\circ - m(D\hat{M}E) \Leftrightarrow m(D\hat{M}E) = 90^\circ$. Logo o triângulo *DME* é retângulo e, sendo *M* o centro do círculo, isósceles. Então, sendo a projeção de *M* sobre *DE* o ponto médio de *DE* e, portanto, circuncentro de *DME*. Logo $DE = 2d \Leftrightarrow 10 = 2d \Leftrightarrow d = 5$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Calculou $m(D\hat{M}E)$: **[+ 5 pontos]**
- Mostrou que *DME* é retângulo isósceles: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[+ 3 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- Só a figura do problema, sem ângulos marcados: **[0 ponto]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 2:

Somando as três equações, obtemos

$$2x+2y+2z=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Note que *x*, *y* e *z* têm o mesmo sinal. De fato, se $x > 0$ então $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$ e $z=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)>0$. Analogamente, se $x < 0$ então $y < 0$ e $z < 0$.

Agora, veja que, pela desigualdade das médias, $|y|=\frac{1}{2}\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)\geq\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=1$ e, analogamente, $|x|\geq 1$ e $|z|\geq 1$. Mas isso implicaria $\frac{1}{|x|}\leq 1$, $\frac{1}{|y|}\leq 1$ e $\frac{1}{|z|}\leq 1$, $|x+y+z|=|x|+|y|+|z|\geq 3$ e $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{z}\right|\leq 3$. Mas $|x+y+z|=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|$, logo todas as desigualdades anteriores são igualdades, ou seja, $|x|=|y|=|z|=1$. Lembrando que *x*, *y* e *z* têm o mesmo sinal, as únicas possibilidades são $x = y = z = 1$ e $x = y = z = -1$. Verifica-se facilmente que as duas possibilidades são realmente soluções.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$: **[2 pontos]**
- Mostrou que $|x|\geq 1$, $|y|\geq 1$ e $|z|\geq 1$: **[+ 4 pontos]**
- Mostrou que $|x|=|y|=|z|=1$: **[+ 2 pontos]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Mostrou que *x*, *y* e *z* têm o mesmo sinal: **[1 ponto]**
- Obteve uma equação em uma variável só (ela é equivalente a $7x^8 + 28x^6 - 14x^4 - 20x^2 + 1 = 0$): **[6 pontos]**
- Obteve uma equação em uma variável só e obteve uma fatoração que permite resolvê-la (ela é $(x^2 - 1)(7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1) = 0$): **[8 pontos]**
- Só a resposta: **[0 ponto]**

PROBLEMA 3:
Seja $Q(x) = P(x) - 2011$. Então $Q(x) = 0$ tem coeficientes inteiros e duas de suas raízes são 1 e r. Logo $Q(x) = (x - 1)(x - r)R(x)$, sendo $R(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros e, portanto, $P(x) = (x - 1)(x - r)R(x) + 2011$.

Como $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - r)R(x) = -2011$ tem soluções inteiras, e $R(x)$ é inteiro para x inteiro, $x - 1$ e $x - r$ são dois divisores distintos (não necessariamente positivos) de 2011. Sendo 2011 primo, cada um desses dois fatores pode ser –2011, –1, 1 ou 2011, com a única restrição sendo que eles não podem ser –2011 e 2011 simultaneamente. Assim, $(x - 1) - (x - r) = r - 1$ pode ser igual a 2010, –2010, 2012, –2012, 2 ou –2, ou seja, r pode ser igual a 2011, –2009, 2013, –2011, 3 ou –1.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Obteve $P(x) = (x - 1)(x - r)R(x) + 2011$: **[3 pontos]**
- Obteve que $x - 1$ e $x - r$ são divisores de 2011 para algum x: **[+ 4 pontos]**
- Concluiu: **[+ 1 ponto por cada dois valores]**
- Esqueceu de eliminar os casos $x - 1 = x - r$ e/ou $\{x - 1; x - r\} = \{2011, -2011\}$: **[–1 ponto]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores:
- Só a resposta: **[1 ponto]**

PROBLEMA 4:

Para $n = 1$, temos k possibilidades (basta escolher a cor da região 1); para $n = 2$, há $k(k - 1)$ possibilidades (k escolhas para a região 1 e $k - 1$ para a região 2, que deve ter cor diferente da região 1). Suponha $n \geq 3$ e seja a_n a quantidade desejada de maneiras de pintar um círculo dividido em n setores, sem que haja setores vizinhos de mesma cor.

Pintemos a região de qualquer uma das k cores e cada uma das regiões 2, 3, …, n de qualquer uma das $k - 1$ cores diferentes da cor da região anterior. Observe a cor da região n: se a cor é diferente da cor da região 1, obtemos uma pintura válida com n setores; se a cor é igual à cor da região 1, se juntarmos a região 1 e a região n obtemos uma pintura válida com $n - 1$ setores. Note que qualquer pintura com n setores e qualquer pintura com $n - 1$ setores é obtida de maneira única com esse procedimento. Assim, $a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}$ para $n \geq 3$.

Agora aplique a igualdade repetidas vezes:

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n-1} &= k(k-1)^{n-1} \\
-a_{n-1} - a_{n-2} &= -k(k-1)^{n-2} \\
a_{n-2} + a_{n-3} &= k(k-1)^{n-3} \\
-a_{n-3} - a_{n-4} &= -k(k-1)^{n-4} \\
&\dots \\
(-1)^{n+1}a_3 + (-1)^{n+1}a_2 &= (-1)^{n+1}k(k-1)^2
\end{aligned}$$

Somando as $n - 2$ igualdades, obtemos

$$a_n + (-1)^{n+1}a_2 = k(k-1)^2((k-1)^{n-3} - (k-1)^{n-4} + \dots + (-1)^{n+1}) = k(k-1)^2 \frac{(-1)^{n+1}((-k+1)^{n-2} - 1)}{-k+1-1}$$

$$a_n = (-1)^n k(k-1) + (k-1)^2(-1)^n((-1)^n(k-1)^{n-2} - 1) = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n$$

Logo, considerando que a fórmula obtida vale para $n \geq 2$, temos

$$a_n = \begin{cases} k, \text{se } n = 1 \\ (k-1)^n + (k-1)(-1)^n \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve alguma relação recursiva (como $a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}$ ou $a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$) que permita resolver o problema: **[5 pontos]**
- Resolveu a recursão: **[+ 5 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as acima e nem entre si.

- Fez casos pequenos ($n \leq 3$) : **[0 ponto]**
- Fez algum caso com ($n > 3$): **[1 ponto]**