XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível Universitário
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja $f:[0,1]\to[0,1]$ crescente, derivável e inversível.

Se $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, prove que existem dois reais diferentes a e b, $0 \le a < b \le 1$, tais que $f'(a) = f'(b) = 1$.

Obs.: f^{-1} denota a inversa da função f.

PROBLEMA 2

Seja $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$. Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$, para cada inteiro positivo n denote por $r(A, B, n)$ o número de soluções da equação $a + b = n, a \in A, b \in B$.

Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(A, B, n + 1) > r(A, B, n)$ para todo $n > n_0$ se e somente se $\mathbb{N}\backslash A$ e $\mathbb{N}\backslash B$ são finitos.

PROBLEMA 3

Dados $n, a_1, a_2, ..., a_n$ inteiros positivos, definimos $q_0 = 1, q_1 = a_1$ e $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$, para $1 \le k \le n-1$.

Prove que, dado $c > 1$, existe $K > 0$ tal que, para todo $M > K$, existem n inteiro positivo e $a_1, a_2, ..., a_n$ pertencentes a $\{1,2\}$ tais que $M \le q_n < c \cdot M$.

XXXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível Universitário
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Seja H o hiperboloide de equação $3x^2 + 3y^2 - z^2 - 1 = 0$.

i) Prove que todo ponto $(x, y, z) \in H$ pertence a exatamente duas retas contidas em H.

ii) Prove que todas as retas contidas em H formam o mesmo ângulo com o plano de equação $z = 0$, e determine esse ângulo.

PROBLEMA 5

Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfazem:

i) $f(f(n))=f(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

ii) $f(2009n+2008)=2009.f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 6

Para n inteiro positivo seja $f(n)$ o número de produtos de inteiros maiores que 1 cujo resultado é no máximo n, isto é, $f(n)$ é o número de k-uplas $(a_1, a_2, ..., a_k)$ onde k é algum natural, $a_i \geq 2$ é inteiro para todo i e $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \leq n$ (contando a 0-upla vazia ( ), cujo produto dos termos é 1).

Assim, por exemplo, $f(1) = 1$, por causa da 0-upla ( ) e $f(6) = 9$, por causa da 0-upla ( ), das 1-uplas (2), (3), (4), (5) e (6) e das 2-uplas (2, 2), (2, 3) e (3, 2).

Seja $a > 1$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^a} = 2$.

a) Prove que existe uma constante $K > 0$ tal que $f(n) \leq K \cdot n^a$ para todo inteiro positivo n.

b) Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que $f(n) \geq c \cdot n^a$ para todo inteiro positivo n.