XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática — 2011

Nível Universitário — Segunda Fase

Primeiro dia — 15 de outubro de 2011

Problema 1

Para cada t real, seja $P_t(x) = x^3 - 12x + t$, e seja

$$\Delta(t) = \max\{c \in \mathbb{R} \mid P_t(c) = 0\} - \min\{c \in \mathbb{R} \mid P_t(c) = 0\}$$

a diferença entre a maior raiz real e a menor raiz real de $P_t(x)$. Determine o conjunto de valores que $\Delta(t)$ pode assumir quando t varia.

Problema 2

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo unitário. Determine a soma das áreas de todos os triângulos cujos vértices são vértices do polígono.

Problema 3

Para n inteiro positivo e A um subconjunto do conjunto $\mathbb{Z}/(n)$ dos inteiros módulo n, definimos $f(A) = \min_{t \in \mathbb{Z}/(n)} |A \cap (A+t)|$, onde $A + t = \{x + t, x \in A\} \subset \mathbb{Z}/(n)$. Definimos $g(n) = \max\{f(A); A \subset \mathbb{Z}/(n), |A| = \lfloor n/2 \rfloor\}$.

(a) Prove que $g(n) \leq \lceil n/4 \rceil - 1, \forall n \geq 1$.

(b) Prove que $g(n) = \lceil n/4 \rceil - 1$ para infinitos valores de $n \geq 1$.

XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática — 2011

Nível Universitário — Segunda Fase

Segundo dia — 16 de outubro de 2011

Problema 4

Considere o polinômio

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

(a) Mostre que se r é raiz de $f(x)$, então $r^2 + r - 3$ também é uma raiz de $f(x)$.

(b) Sejam α, β e γ as três raízes de $f(x)$, em alguma ordem. Determine todos os possíveis valores de

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Problema 5

Se $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^3$, denote por $C(u_1, \ldots, u_k)$ o cone gerado por $u_1, \ldots, u_k$:

$$C(u_1, \ldots, u_k) = \{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k; a_1, \ldots, a_k \in [0, +\infty)\}.$$

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 pontos sorteados independente e uniformemente na esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(a) Qual é a probabilidade de que $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$?

(b) Qual é a probabilidade de que cada um dos quatro vetores seja necessário para gerar $C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, isto é, que $C(v_1, v_2, v_3) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $C(v_1, v_2, v_4) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $C(v_1, v_3, v_4) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $C(v_2, v_3, v_4) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

Problema 6

Seja $(x_n)_{n \geq 0}$ um sequência de números inteiros que satisfaz uma *recorrência linear de ordem* k para um certo inteiro positivo k fixado , i.e., existem constantes reais $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que $x_{n+k} = \sum_{r=1}^{k} c_r x_{n+k-r}$, $\forall n \geq 0$. Suponha que k é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Prove que $c_j \in \mathbb{Z}$, para todo j com $1 \leq j \leq k$.